

カルマン・フィルターによる超長基線電波干渉法 (VLBI) データ解析*

郵政省電波研究所・鹿島支所 日置 幸介

(昭和 63 年 1 月 12 日受理)

Kalman Filtering Technique for Very Long Baseline Interferometry

Kosuke HEKI

Kashima Space Research Center, Radio Research Laboratory,
Ministry of Posts and Telecommunications

(Received January 12, 1988)

ABSTRACT

The final stage of the geodetic VLBI data analysis is the adjustment of various "stationary" parameters such as station positions and additional "non-stationary" parameters such as the inter-station offsets of atomic clocks and atmospheric zenith path delays. With the conventional least-squares estimation method, complicated techniques have been needed to estimate the parameters with temporal variation. For example, the variation of clock offsets is usually assumed to be represented by a set of parabolic curves connected by several discontinuities.

With a new parameter estimation method based on Kalman filtering technique, both the deterministic estimation of stationary parameters and the tracking of the values of non-stationary parameters varying according to some stochastic process are possible. This enables the VLBI parameter estimation without operator-dependent procedures to modelize such temporal variations. It is also shown that the higher repeatability of the baseline lengths is obtained by Kalman filter method than by the conventional least-squares method.

1. はじめに

超長基線電波干渉法 (Very Long Baseline Interferometry, VLBI) は遠く離れた複数のアンテナで準星等の天体電波源から発せられた電波を受信し, それらの相互相関をとることによって各局間の遅延時間及びその時間変化率 (遅延率) を求める技術である. それらの遅延や遅延率から各アンテナの三次元的な位置, 電波源の方向, 地球回転パラメータなどの情報を抽出する. アンテナ位置の推定結果は各局間の距離変化の形でプレート運動や地殻変動の測定に応用され [1], 地球回転パラメータは極運動や自転速度変動など地球回転の研究に応用される [2].

観測された遅延時間とアприオリに与えたパラメータから予測した遅延時間の差をもとにして各種のパラメータの微妙なずれを求める作業はパラメータ推定と呼ばれ, VLBI では線形最小二乗法が用

* 昭和 62 年 11 月 日本測地学会第 68 回講演会にて発表.

いられる [3]. 推定パラメータの種類は実験の目的によって多少異なるが, 局位置の地球中心を原点とした直交座標における XYZ 成分, 天体電波源の赤経赤緯, 地球回転パラメータ (極位置の XY 成分, UTI と原子時の差), 章動のずれ等が代表的である. その他にこれらパラメータを正確に求める上で, 各局で独立に維持されている原子時計間の時刻オフセット, 各局における中性大気の大気遅延等も同様にパラメータ推定する必要がある. 時刻比較実験のように時刻オフセットの推定値そのものが実験の成果となる特殊な実験もある.

VLBI 実験では一つの電波源の観測は数分だが, 次々に電波源を切り換えながら一日ないし二日にわたって数百の観測が行われる. 局位置等の測地パラメータはこれらの実験期間中は不変とすれば通常の最小二乗法による推定が可能である. 一方, 時刻オフセットは各局の時計の歩度の差によって時々刻々変化するので一定パラメータとして単純に求められない. また, 大気による遅延も大気状態の変化に伴って時間変化すると考えられ, 単純に一定値として推定するとこれらと相関を持つ他のパラメータの推定値に悪影響を及ぼす.

これらに対処する為の効果的な方法の一つは時刻オフセットを時間に関する最大二次程度の多項式で近似して係数を推定するというやりかたである. 原子時計として一般に用いられる水素メーザは一定時間ある多項式に従って変化すると共に時々急激な歩度の変化を示すことが知られている. それらに関しては実験期間を時計のとびの回数に合わせていくつかの区間に分け, 区間毎に別の多項式の係数を推定すれば良い. 大気遅延についても実験期間を複数の区間に分けて独立の値を推定すれば時間変化をある程度モデル化できる.

時刻オフセットの区間の境界設定や多項式の次数設定の判断は, 遅延残差の系統的な動きから解析者が個人的に行っている. しかし, 局数の増加に伴って歩度のとびを起こした時計の特定が困難になり, これらの作業は VLBI のデータ解析において客観性を失う大きな原因となる. さらに大気の大気遅延の場合は残差の動きから時間変化を読みとるのは難しく, 例えば機械的に等間隔の区間に分けて推定し, 有意な変化の無い区間境界を後で取り除くという複雑な手続きが必要となる.

本研究ではカルマン・フィルターを用いて時刻オフセットなどの時間変化する状態量を追尾しながら測地パラメータを推定する方法を考えてみた. カルマン・フィルターは線形システムの予測理論として戦後発達したもので [4], その本質は古典的なガウスの最小二乗法の現代版である. この方法は予測対象として時間とともに進化する量の扱いが可能で広範な応用範囲を持つ.

2. カルマン・フィルターの基本式

詳細な式の導出は文献 [5] に譲り, ここでは概要を紹介する. まず時間変化する n 次の状態量ベクトル x を考える. 時刻 t は

$$t_0 < t_1 < t_2, \dots, < t_n$$

の不連続な値をとるものとし, x の時間変化は次式の中の $n \times n$ の既知の遷移行列 ϕ で表され, それに w というベクトルで表されるゆらぎが加わる.

$$x_i = \phi_{i,i-1} x_{i-1} + w_{i-1} \quad (1)$$

ベクトル x の各成分は z という m 次の観測量ベクトルを通じて観測される. それらの間の関係式は,

$$z_i = H_i x_i + v_i \quad (2)$$

で表される. ここで H は $m \times n$ 次の既知行列である. v は観測誤差であり, 違う時刻の誤差どうしは相関を持たない. w と v の各成分の共分散行列を Q と R で表す.

$$E[w_i w_j^T] = Q_i \delta_{ij} \quad E[v_i v_j^T] = R_i \delta_{ij}$$

E は期待値を, 添字の T は転置行列を, δ はクロネッカー・デルタを示す. 以上の問題設定で, ある時刻 k における観測量 z を用いて未知の状態量 x の時刻 k における値を予測し, 同時にその誤差行列 $P(n \times n)$ を求める問題を考えてみよう. x の推定値を \hat{x} とすると P は次のような式で表される.

$$P_k = E[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T]$$

$k-1$ の時刻における x の推定値 \hat{x} から次の観測時刻 k における \hat{x} は以下のように推定される.

$$\hat{x}_k' = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}$$

時刻 k における観測値 z を用いてこれを改良してみよう. 時刻 k における x の推定値が正しく, 測定誤差が無ければ測定値は (2) 式によってその \hat{x} に H を掛けたものであることが予測される. この場合 x の推定値の実際の値からのずれは次のような予測値と実際の観測値の差に反映される.

$$e_k = z_k - H_k \hat{x}_k' = z_k - H_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}$$

この情報をフィードバックさせれば x の推定値は次式のように改良される.

$$\hat{x}_k = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + K_k e_k \quad (3)$$

ここで K は $n \times m$ の行列で, 利得行列と呼ばれる. 利得行列は次式のように与えると推定された \hat{x} と実際の x の差の各成分の二乗和 (行列 P の跡) が最小になる. なお添字の -1 は逆行列を示す.

$$K_k = P_k' H_k^T [H_k P_k' H_k^T + R_k]^{-1} \quad (4)$$

ここで, P' は \hat{x} の $k-1$ の時刻における誤差行列を k の時刻における誤差行列に誤差伝搬させたものであり, 次のように計算される.

$$P_k' = \phi_{k,k-1} P_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

この時刻 k における誤差行列 P は P' から次のように更新される.

$$P_k = P_k' - K_k H_k P_k' \quad (5)$$

(3) 式から (5) 式がカルマン・フィルタの基本式である. 実際の適用に際しては最初の観測時刻における \hat{x} とその誤差行列 P を初期化し, 次に時刻を観測開始時刻から終了時刻まで順々に変化させてそれぞれの時刻で既知の H, Q, R 等の行列からこれらの式を次々に適用して, 各時刻での \hat{x} と P を求めることができる.

3. カルマン・フィルタの VLBI への応用

VLBI のパラメータ推定では一章で述べたように多種類のパラメータを同時に推定するが, ここでは最も簡単な例として二局一基線の実験で二局の位置ベクトルの差である基線ベクトル B の三成分 (x, y, z) と両局の時刻のオフセット, 時計の歩度 (レート) の差の五種類のパラメータを成分とする状態量ベクトルを考え, (1) 式がどのようになるか考えてみる. 基線ベクトルは実験期間中一定す

なわちある電波源を観測した時刻 k と一つ前の観測を行なった時刻 $k-1$ で同じ値をとると考えて良いだろう。一方時刻 k における瞬時の時刻オフセットは時刻 $k-1$ における時刻オフセットとどのような関係になっているだろうか。 k の時刻における時刻オフセットは $k-1$ の時刻オフセットより、時刻 $k-1$ におけるレートに k と $k-1$ の時刻の差をかけた分だけ変化しているに違いない。従って、ベクトルの各成分は次に示すような遷移行列に従って進化し、カルマン・フィルターの問題設定 (1) の式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ \text{Offset} \\ \text{Rate} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ \text{Offset} \\ \text{Rate} \end{pmatrix}_{k-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_o \\ \sigma_r \end{pmatrix}_{k-1}$$

$$\Delta T = t_k - t_{k-1}$$

例えばある観測を行なった時刻にオフセットが 100 psec であり、その時のレートのずれが毎分 0.1 psec であったとする。その場合 20 分後の次の観測時刻のオフセットの予測値は $100 + 0.1 \times 20 = 102$ psec である。 σ は時刻オフセットとレートのずれに加わるゆらぎである。

状態ベクトルのこれらの成分は観測量ベクトルを通じて間接的に観測されるが、VLBI の観測量ベクトルは遅延時間と遅延率の二成分から成る。(2) 式に相当する状態量ベクトルと観測量ベクトルの各成分の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial B_x} & \frac{\partial \tau}{\partial B_y} & \frac{\partial \tau}{\partial B_z} & 1 & 0 \\ \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial B_x} & \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial B_y} & \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial B_z} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ \text{Offset} \\ \text{Rate} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \sigma_\tau \\ \sigma_{\dot{\tau}} \end{pmatrix}_k$$

σ_τ : 遅延観測誤差

$\sigma_{\dot{\tau}}$: 遅延率観測誤差

これらの関係式を (1) 式と (2) 式にあてはめ、(3) 式から (5) 式に示すカルマン・フィルターのアルゴリズムを個々のデータに順次適用することによって各時刻における基線ベクトルと時刻オフセットの推定値とその誤差行列が求められる。

従来の最小二乗法では総てのデータを最も良く説明するパラメータを一組推定するだけなのに対してカルマン・フィルター法では観測データを逐次処理しながらパラメータの推定値を変化させてゆく形態をとる。その結果基線ベクトルのような非変化パラメータは初期値から徐々に改良されてゆき、最終的に総てのデータを最も良く説明する推定値に落ち着く。一方時刻オフセットのようにある確率過程に従って変化するパラメータはその時刻で最も確からしい値を時々刻々推定しながらその時間変化を自動追尾することになる。

4. 実データでのテスト

4-1. 多基線データの逐次処理

以上に述べたアルゴリズムを電波研究所共通利用計算機システム ACOS-850 上にコーディングし、実際の VLBI 実験で求められた諸基線の遅延および遅延率データを用いてパラメータ推定を行なった。従来のパラメータ推定と同様遅延データにはケーブル長補正と電離層補正はあらかじめ施し

た。前章では基線ベクトルと時刻オフセットを推定する最も単純な例を挙げたが、実際には大気遅延も時刻オフセット同様ランダム・ウォーク過程を仮定して瞬時の天頂遅延とその変化率を同時に推定する。グローバルな実験ではさらに章動のずれも基線ベクトルと同様非変化量として推定する。

なお、実際には二局一基線だけの VLBI 実験は少なく、三局から六局といった実験が多い。その場合一つの観測に伴って生じる観測量は基線数の二倍（遅延と遅延率を用いた場合）となる。例えば六局参加の VLBI 実験では 15 基線の倍で 30 になり、カルマン・フィルタの (4) 式で計算すべき逆行列の大きさは 30×30 となる。次数の多い逆行列計算は計算時間が長くなるだけでなく計算精度の点からも望ましくない。観測量の数が多の場合、すなわち (2) 式のベクトル z の次数が多い時にその成分に関する観測誤差 v がお互い独立ないくつかのグループに分けられる場合は、ある観測時刻に関するデータを一括して処理する代わりにグループ毎に逐次処理しても同じ結果が得られることが数学的に証明される [5]。VLBI では個々の基線の遅延データの観測誤差は基線間の相関を持たないと考えられるので、この性質を利用して基線毎の逐次処理をすれば一回の処理に取り扱う観測量は遅延と遅延率の二つで済み、計算時間の短縮と高精度化が図れる。

4-2. パラメータの推定例

Fig. 1 は 1986 年の西太平洋実験 [1] についてカルマン・フィルタを用いてパラメータ推定した例である。Fig. 1 (a) は測地パラメータの例としてハワイのカウアイ局とアラスカのフェアバンクス局を結ぶ基線ベクトルの推定の様子を示す。ここでは横軸に実験開始時から推移した時間を、縦軸に基線ベクトルの x, y, z 成分と基線長 (図中では B で表す) の推定値 (アプリアリに与えた値からのずれ) を示してある。各パラメータの初期値は適当に与えてある (この例では総てゼロ) ので最初の数時間は正しい値を捜して推定値が動くが、実験開始後十時間程度で安定値に収束する。この実験は 40 時間を超える比較的長いものだが、収束してからは推定値に顕著なふらつきは無い。また、図中には示さないが収束してからも推定値の誤差は時間の推移と共に着実に小さくなる。

Fig. 1 (b) は同じ実験についてカウアイ、フェアバンクス、鹿島の各局における大気の大気天頂遅延の観測時毎の推定値をプロットしたものである。基線パラメータと違って推定値は勝手に与えた初期値から本来の値に落ち着いてからも実験終了時まで絶え間なく細かい変動を見せる。なお、遅延データには大気モデルと地上気象データから求めた乾燥大気による遅延をあらかじめ補正しているため、ここで推定された値は水蒸気による遅延を表すと考えて良い。

4-3. パラメータ推定後の残差について

Fig. 2 は、カルマン・フィルタによるパラメータ推定値を用いて計算した予測遅延と観測遅延の差、すなわち解析残差を示す。データは Fig. 1 と同じ実験のカウアイ-フェアバンクス基線のものであり、遅延と遅延率の両方についてプロットしてある。本来この基線のデータは三回原子時計の歩度のとびがあり、従来の最小二乗法による解析では時計多項式の係数は四つの区間に分けて別々に求めないと残差の系統的な動きが除去できない。しかし、新しい方法による解析残差にはこのような系統的な残差の流れが綺麗に除かれている。これは時刻オフセットの追尾に成功していることを意味する。

カルマン・フィルタの (2) 式に登場する観測誤差ベクトル v の各成分は VLBI の相関処理結果から遅延、遅延率の両方についてアプリアリに与えられる。しかし、(1) 式中の状態量ベクトルの各成分のゆらぎの大きさについては適当に仮定しないと計算が進まない。これは時刻オフセットや大気遅延のランダム・ウォーク過程を性格づけるものである。例えば時刻オフセットのゆらぎを大きくすると推定結果はギザギザの多い複雑なものになり、解析残差は小さくなってゆく。逆にこの値を小さく

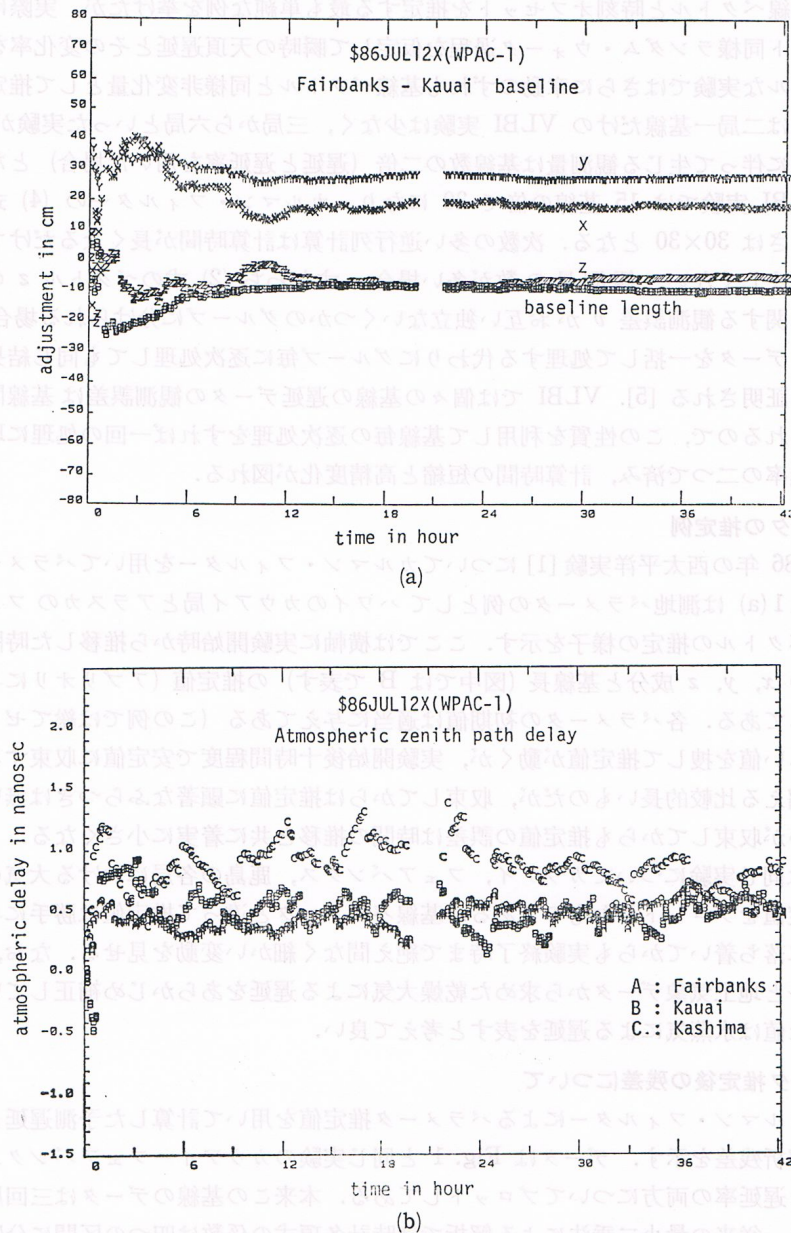


Fig. 1. (a) The behaviors of the deterministic parameters in Kalman filtering process. Horizontal and vertical axes represent the time which elapsed from the beginning of the experiment and the adjusted values of the parameters in centimeter. X, Y, Z and B in the figure denote the adjusted values of the x, y, z coordinates and the length of Fairbanks-Kauai baseline respectively. The experiment is the Western Pacific experiment in July 1986. (b) The behaviors of the stochastic parameters in Kalman filtering process. A, B and C in the figure denote the adjustment of the atmospheric zenith path delays (wet component only) for Fairbanks, Kauai and Kashima stations respectively. Vertical axis unit is nanosecond. The experiment is the same as (a).

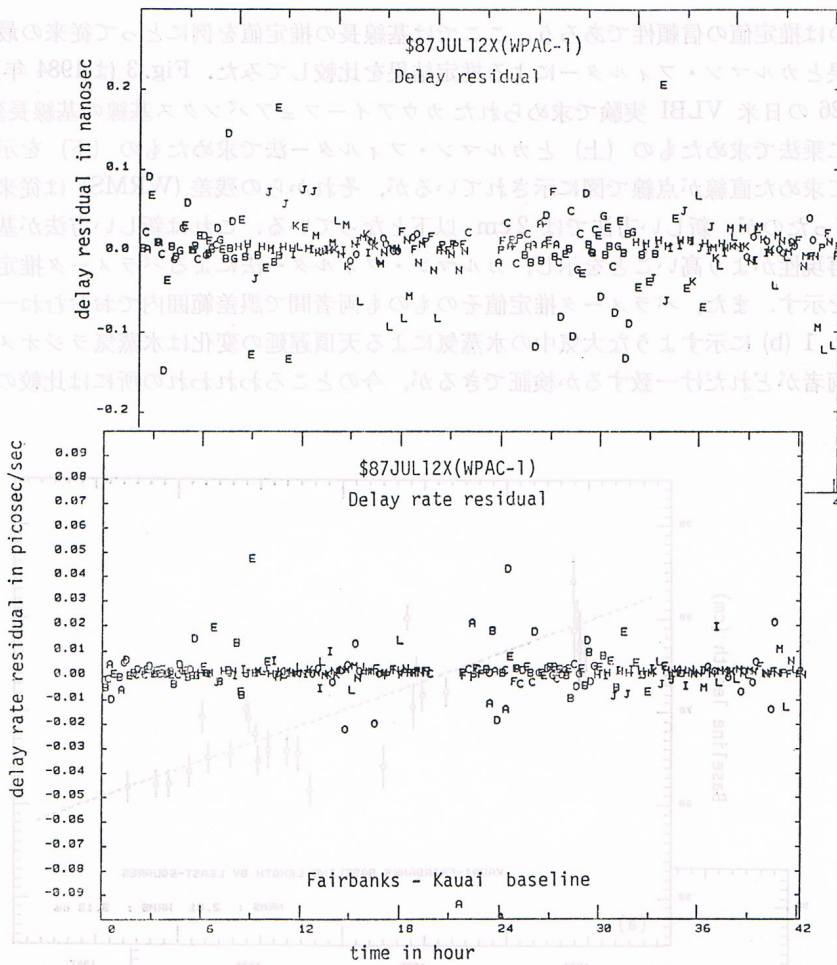


Fig. 2. Post-fit residuals of the observed delays (upper) and delay rates (lower) for Kauai-Fairbanks baseline in 1986 Western Pacific experiment. The alphabets in the figure denote the kind of observed celestial radio sources.

くとるとなめらかな時刻オフセットの推定結果が得られるが解析残差は大きくなる。

この性質を利用すれば、解析残差が遅延や遅延率のアプリオリ観測誤差と同程度の大きさになるように w の成分の大きさを調整することもできる。Fig. 2 の例はこのようにして時刻オフセットやレートに加わるゆらぎの大きさを調整したもので、解析残差は遅延、遅延率共に観測誤差と調和的な大きさになっている。従来の最小二乗推定ではパラメータ推定後の残差（普通アプリオリな観測誤差の数倍になってしまう）を観測誤差と調和させる為に仮想的な未知の観測誤差を加えてパラメータ推定しているが [3], カルマン・フィルター法ではモデルのゆらぎを調整することによって両者の調和をより合理的に図ることができる。

5. 新しい方法の評価と結論

パラメータ推定法の良し悪しについては計算速度、客観性などいくつかの判断基準が考えられるが

最も大切なのは推定値の信頼性であろう。ここでは基線長の推定値を例にとって従来の最小二乗法による推定結果とカルマン・フィルターによる推定結果を比較してみた。Fig. 3 は 1984 年夏から 1987 年春までの 26 の日米 VLBI 実験で求められたカウアイフェアバンクス基線の基線長変化であり、従来の最小二乗法で求めたもの (上) とカルマン・フィルター法で求めたもの (下) を示す。両者を一回帰して求めた直線が点線で図に示されているが、それからの残差 (WRMS) は従来の方法では 3 cm 以上だったのが、新しい方法では 2 cm 以下となっている。これは新しい方法が基線長推定値の実験間の再現性がより高いことを示し、カルマン・フィルター法によるパラメータ推定値の信頼性が高いことを示す。また、パラメータ推定値そのものも両者間で誤差範囲内でおおむね一致した。

また、Fig. 1 (b) に示すような大気中の水蒸気による天頂遅延の変化は水蒸気ラジオメータのデータを使えば両者がどれだけ一致するか検証できるが、今のところわれわれの所には比較の対象になる

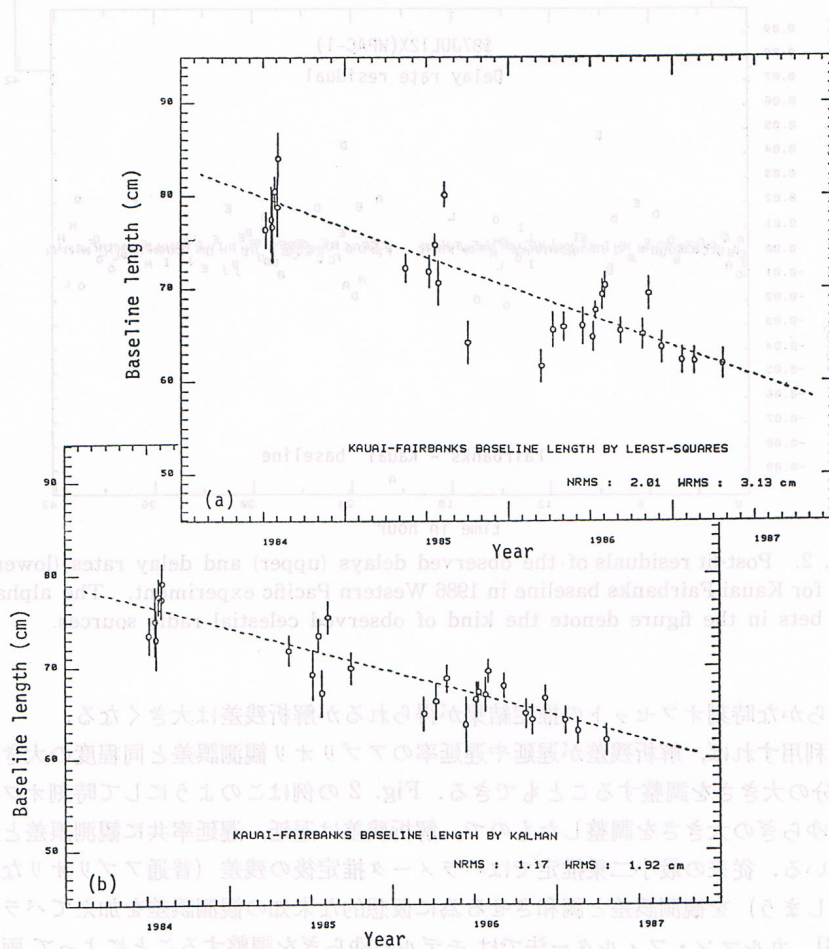


Fig. 3. Kauai-Fairbanks baseline length evolution in 1984-1987 obtained by least-squares method (above) and Kalman filter method (below). The vertical axis shows the centimeter portion of the baseline lengths. Error bars denote one-sigma formal errors and the broken lines are the best-fit lines for these baseline length data. The scatter about these lines is smaller for the results obtained by Kalman filter method.

高精度のラジオメータが無い。なお、米国の研究者による、カルマン・フィルターで推定した大気遅延の変化がラジオメータで求めたものと良く合うという報告がある [6]。

新しい方法は計算時間や所要メモリー量から見ても従来の最小二乗法に比較して有利だが、それにも増して時刻オフセットのモデル化における多項式の次数決定や区間設定などのオペレータ自身による試行錯誤が無いだけ全体のパラメータ推定作業に要する時間は格段に少ない。また、パラメータ推定値も従来の方法に比較して信頼性が高いようであるが、これは従来多項式や区間設定だけで時刻オフセットや大気遅延の時間変化が完全にモデル化できなかったのがカルマン・フィルターを使った新しい方法でより理想的にモデル化されたからかも知れない。

参 考 文 献

- [1] HEKI, K., Y. TAKAHASHI, T. KONDO, N. KAWAGUCHI, F. TAKAHASHI and N. KAWANO: The relative movement of the North American and Pacific plates in 1984-1985, detected by the Pacific VLBI network, *Tectonophysics*, **144**, (1987), 151-158.
- [2] CARTER, W. E., D. S. ROBERTSON and J. R. MACKAY: Geodetic radio interferometric surveying: Applications and results, *J. Geophys. Res.*, **90**, (1985), 4577-4587.
- [3] 高橋富士信・吉野泰造: K-3 型データ解析ソフトウェア: パラメータ推定ソフトウェア, *電波研究所季報*, **30**, (1984), 295-309.
- [4] KALMAN, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, *J. Basic Eng.*, **82**, (1960), 35-45.
- [5] SORENSON, H. W.: Kalman filtering techniques, in *Advances in Control Systems*, vol. 3, C. T. Leondes, ed., Academic Press, New York, (1966).
- [6] DAVIS, J. L.: Atmospheric Propagation Effects on Radio Interferometry, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1986).