

月惑星の重力場におけるカウラの法則と そのスケーリング則

橋本実奈・日置幸介

北海道大学大学院理学院自然史科学専攻

(2013 年 5 月 1 日受付, 2013 年 5 月 30 日改訂, 2013 年 6 月 3 日受理)

Kaula's rule and its scaling law for the gravity fields of the Moon and the terrestrial planets

Mina Hashimoto and Kosuke Heki

Dept. Natural History Sciences, Hokkaido University

N10 W8, Kita-ku, Sapporo 060-0810, Japan

(Received, May 1, 2013; Revised, May 30, 2013; Accepted, June 3, 2013)

Abstract

Gravity fields of the Moon and terrestrial planets are modeled by combining spherical harmonics of various degrees/orders multiplied with the Stokes' coefficients. These coefficients have been estimated for several celestial bodies including the Earth using tracking data of artificial satellites. The Kaula's rule-of-thumb predicts that these coefficients are inversely proportional to the square of the degree n of the spherical harmonics. In this study, we confirmed that this is the case for the Moon, the Earth, Mars and Venus. A larger celestial body is hotter inside and has stronger surface gravity, resulting in smaller Stokes' coefficients. Here we show that such coefficients obey a simple scaling law, i.e. they are inversely proportional to the square of the surface gravity of the body. The Moon has a strong dichotomy, i.e. the nearside has thin crust and flat terrain, whereas the farside has thick crust and rugged terrain. Here we also discuss how far such dichotomy may influence the scaling law.

1. はじめに

地球や月惑星の重力場の全体像は, それらを周回する衛星を追尾して, 時間とともにわずかに変化するその軌道要素から推定される. 地球の重力場は, GRACE (Gravity

Recovery and Climate Experiment) 衛星が 2002 年に打ち上げられて、全球の重力場が高時間分解能で精密に決められるようになった (宗包, 2013)。惑星に目を転じると、火星や金星を周回する探査機を地球から追尾することによって、それら惑星の重力場の高精度モデルが得られている。一方月は、自転と公転が同期しているため、地球からの追尾による全球重力場の直接計測は困難であった。しかし、2007 年に打ち上げられた「かぐや」によって、リレー衛星を用いた月裏側の重力の直接計測が実現し、全球重力場が高精度で推定できるようになった (詳細は測地学会誌第 55 巻 2 号特集「かぐやによる測月学」に掲載された諸論文を参照のこと)。

これら月惑星の全球重力場は、低次からある程度高次までの球面調和関数 (球関数) に展開することによってモデル化されるが、球関数の係数 (ストークス係数) にはカウラの法則 (Kaula's rule-of-thumb) が成り立つことが知られている (Kaula, 1966)。本研究では、全球重力場モデルが得られている天体について、カウラの法則の成立を議論するとともに、異なる大きさの天体の重力場がどのようなスケールリング則に従うのかを考察する。また、小天体でのスケールリング則を考察するために、比較的大型の小惑星であるベスタ (平均半径 265 km) を取り上げる。

2. 地球型惑星と月におけるカウラ則

$2n + 1$ 個ある次数 n のストークス係数の平均的な大きさ (自乗和の平均の平方根) は n の 2 乗に反比例するというのがカウラの法則であり、次数 n 、位数 m のストークス係数を C_{nm} , S_{nm} とすると、

$$\sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)}{2n + 1}} \approx \frac{K}{n^2} \quad (1)$$

で表される。これは波長の短い重力異常ほど小さな振幅を持ち、重力の強さの水平勾配が次数によらずほぼ一定に保たれることを意味する。定数 K は地球ではおよそ 10^{-5} の値を取る。本論文では K をカウラ定数と呼ぶ。かぐや以前の月重力場のように、観測データの地理的分布が著しく偏っている場合は、ストークス係数の推定を安定化するために、カウラの法則を拘束条件に用いていた。観測データがグローバルに分布する場合にもカウラ則が拘束条件に用いられることはあるが、その場合に拘束条件がストークス係数の推定値に与える影響は限定的である (例えば Matsumoto *et al.* (2010) によると、月では 70 次以下の係数にはほとんど影響はない)。

Figure 1a は、月、火星、金星、地球の重力モデルについて、ストークス係数の大きさと次数の関係を両対数で描いたものである。用いた重力モデルは、月は SGM100H (Matsumoto *et al.*, 2010)、火星は GGM1041 (Lemoine, 2003)、金星は SHGJ120p.a01

(Konopliv *et al.*, 1999), 地球は GRACE 衛星の解析センターの一つである GFZ から公開されている 2003 年二月のデータに基づくモデルを用いた。球関数展開の最高次数は月が 100 次, 火星が 90 次, 金星と地球が 120 次である。Figure 1 は両対数であるため, カウラの法則が成り立つと係数の値は傾き -2 の直線に乗る。四つの天体では, いずれもカウラの法則がある程度成り立っていることがわかる。月の比較的低次の項の負のずれがやや目立つが, これについては 4 章で考察する。

3. 異なる天体間のカウラ定数のスケーリング則

一般に, ある物理量を変化させたときに関連する他の物理量がどのように変化するかを規定するのがスケーリング則である, (1)式のカウラ定数 K は, 様々な大きさの天体でどのような値をとるだろうか。Kaula (1963) は, 理論的な考察からカウラ定数は半径の 4 乗に比例, 質量の 2 乗に反比例すると考えた。天体表面での重力は, 質量分布が球対称なら質量を半径の 2 乗で割ったものに比例することを考えると, これはカウラ定数が表面重力の 2 乗に反比例して小さくなることを意味する。本論文では観測から得られた様々な天体のカウラ定数を比較して, このスケーリング則が成り立つかどうかを調べる。

まず, 実際の重力モデルを最も良く説明するカウラ定数 K を天体毎に推定した。その際に次数ごとのモデル (カウラ則が予測する Stokes 係数の大きさ) と実際の値の差 (残差) を最小にすると, 係数が大きな値を取る低次の項が圧倒的な影響力を持つってしまうため, ここでは残差を予測値で正規化してから自乗和を取り, それが最小になるカウラ定数を求めた。得られたカウラ定数は, 月が 3.5×10^{-4} , 火星が 1.3×10^{-4} , 金星が 0.9×10^{-5} , 地球が 1.1×10^{-5} となった。ベスタは, 小惑星の中では比較的大きく, かつ球に近い形状を示す。また, 探査機 Dawn からのスペクトル観測により, 表面の物質が隕石のような始原的な物質ではなく分化した物質であることが見いだされた。これはベスタが小惑星としては珍しく, 地球型惑星のように天体内部が層状構造を持つことを示唆する。重力場モデルのカウラ定数 K は, ベスタの全球的地形と, 仮定された表層密度から間接的ではあるが約 1.1×10^{-2} と推定された (Konopliv *et al.*, 2011)。

Figure 2 に月, 地球, 火星, 金星, ベスタの表面重力とカウラ定数の関係を示す。縦軸がカウラ定数, 横軸が表面重力で, いずれも対数で表している。スケーリング則が成り立っていれば, これらのデータは傾き -2 の線上に分布するはずである。表層重力は地球を 1.00 とし, 月は 0.17, 火星は 0.38, 金星は 0.91, ベスタは 0.026 (Konopliv *et al.*, 2011) とした。五つの天体はほぼ直線にのっており, Kaula (1963) が予測したスケーリング則がおおむね成り立つことを示唆する。

4. 考察

カウラ定数のスケーリング則が成り立つ原因は複数あると思われる。その一つは, 大きい重力が, 天体が丸くなる過程を促進するからであろう。さらに大きな天体は内部に

熱を保持しやすい。放射性壊変による単位質量あたりの発熱量が同じなら、熱流量は半径に比例して大きくなる。高い熱流量はリソスフェアを薄く保ち、アイソスタシー補償を促して重力異常を小さくする。地球型惑星では水星の詳細な全球重力場はまだ得られていない。他天体に比べて比率が大きな水星の中心核が、カウラ定数にどのような影響を与えるのか興味深い(Smith *et al.*, 2012)。

月はその表と裏の二分性が顕著である。例えば表側は地殻が比較的薄く地形が平坦であるが、裏側は逆である。また海とよばれる玄武岩地域はほぼ表側でのみ広範囲に広がっている。本論文ではその起源については議論しないが、大規模な二分性がカウラ定数 K の推定に及ぼす影響を評価する。球関数は本質的にグローバルな関数であるため、表と裏の半球でそれぞれのカウラ定数を直接推定することはできない。本研究では、表と同じ重力場を裏に仮定した仮想的な「表だけの月」を作る。月の経度は表側の中心が 0 度と定義されているため、経度 $0\sim 90$ 度と $270\sim 360$ 度の部分が表側、経度 $90\sim 270$ 度の部分が裏側に相当する。裏側に表側と同じ重力異常の分布を鏡対称に仮定することによって、全球が表側と同様な重力異常を持つ仮想的な月を考える。その重力場を改めて球関数展開することによって「表側のストークス係数」が計算できる。同様に求めた「裏だけの月」と、それぞれのカウラ定数を比較した。なお Figure 1b に示すように、それぞれのストークス係数はカウラの法則をほぼ満たしている。求められた月の表側のカウラ定数 K は 2.4×10^{-4} とかなり小さくなるが、裏側の K は 3.6×10^{-4} と月全体とさほど変わらない。これは月の高地に分布する比較的波長の短い重力異常が、月全体のカウラ定数の決定に大きく貢献していることを示唆している。

凹凸がより顕著な裏側のカウラ定数が大きいのは予測どおりだが、Figure 2 を見る限り、この程度の二分性ではカウラ定数のスケーリング則から大きく逸脱しないとも言える。また月の低次項がカウラ則の予測より系統的に小さいことが Figure 1 から読み取れるが、上で述べた表裏のカウラ定数の比較から、その原因は表側の重力場にあることが示唆される。月の表側には、マスコンに代表されるように、単なる地形の形成とそれに続くアイソスタシー補償という単純な過程で説明できない重力異常成分が比較的大きいため、その影響が見えているのかも知れない。

参考文献

- Kaula, W.M. (1963): The investigation of the gravitational fields of the Moon and planets with artificial satellites, *Adv. Space Sci. Technol.*, 5, 210-230.
- Kaula, W, M. (1966): *Theory of Satellite Geodesy* (Blaidell, Waltham).
- Konopliv, A., W.B. Banerd, and W. L. Sjogren (1999): Venus gravity: 180th degree and order model, *Icarus*, 139, 3-18.
- Konopliv, A.S., S. W. Asmar, B.G. Bills, N. Matrodemos, R.S. Park, C.A. Raymond, D.E. Smith, and M.T. Zuber (2011): The Dawn gravity investigation at Vesta and Ceres, *Space Sci. Rev.*,

163, 461-486.

Lemoine, F.G. (2003): MGM1041c Gravity Model, Mars Global Surveyor Radio Science Archival Volume MGS-M-RSS-5-SDP-V1/mors 1021, URL: <http://pds-geosciences.wustl.edu/geodata/mgs-m-rss-5-sdp-v1/mors1021/sha/>, Geosciences Node, Planetary Data System, Washington University, St. Louis, Missouri, March 28, 2003.

Matsumoto, K., S. Goossens, Y. Ishihara, Q. Liu, F. Kikuchi, T. Iwata, N. Namiki, H. Noda, H. Hanada, N. Kawano, F. G. Lemoine, and D. D. Rowlands (2010): An improved lunar gravity field model from SELENE and historical tracking data: Revealing the farside gravity features, *J. Geophys. Res.*, 115, E06007, doi:10.1029/2009JE003499.

宗包浩志 (2013): 下から見た衛星重力ミッション GRACE, 測地学会誌, 投稿中.

Smith, D.E. et al. (2012): Gravity field and internal structure of Mercury from MESSENGER, *Science*, 336, 214-217.

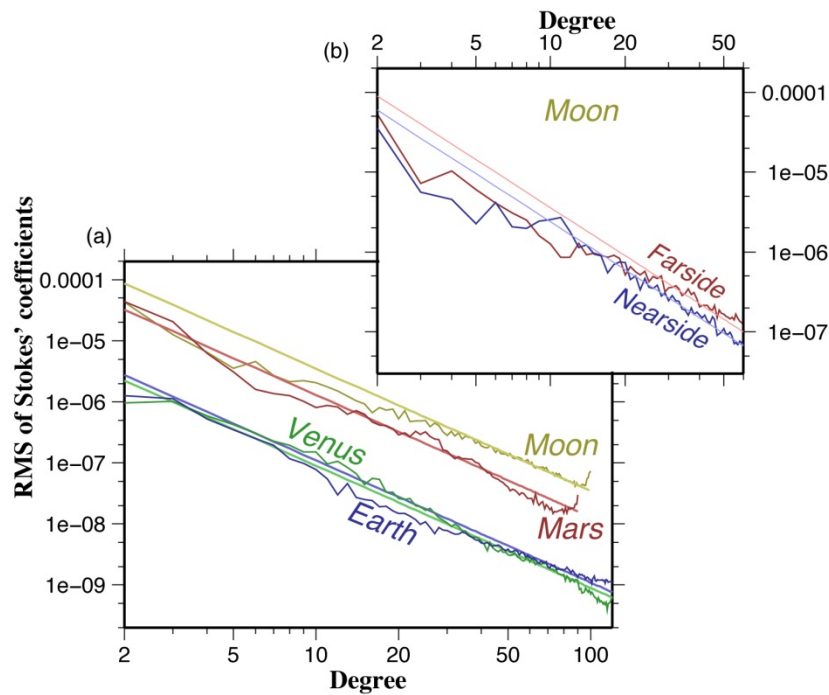


Fig. 1. (a) Root-mean-squares (RMS) of the Stokes' coefficients (Eq. 1) as functions of degree n . Colors show the Moon (green), Mars (red), Venus (yellow) and the Earth (blue). They align with the slopes (lines show the models with the best-fit Kaula constants for individual bodies) designating the Kaula's rule-of-thumb, i.e. RMS is inversely proportional to n^2 . (b) Similar RMS plot for the farside (red) and the nearside (blue) of the Moon.

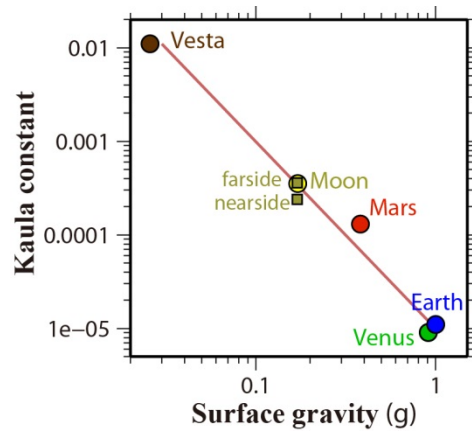


Fig. 2. Kaula constant K (Eq. 1) of five celestial bodies and their surface gravity (normalized by the value of the Earth). This constant appears to scale with the inverse of the square of the surface gravity (red line). For the Moon, we also plot two values of K estimated for the farside and the nearside (smaller squares).