

地形と重力場の相関とアドミッタンス からみる月のリソスフェア

北海道大学理学部地球惑星科学科

宇宙測地学研究室

学籍番号 02110689

三枝 優輝

指導教官名 日置幸介

要旨

地球の衛星である月は、原始地球に火星程度の大きさを持つ巨大隕石が衝突し、その時に生じた破片が集積し冷却することで形成されたと考えられている（ジャイアントインパクト説）。また月は、太陽系の長い歴史を表面に記録し、保存している最も接近しやすい天体なので、太陽系惑星の進化の歴史を解読するための重要な鍵となる。惑星がどのように形成され進化したかを調査することで、その惑星の内部構造、熱エネルギーの収支、冷却時の物質の分化の特徴を理解することができる。

そのため月の探査は今日までに数多くされてきた。ガリレオ・ガリレイによる光学望遠鏡の発明によって、月表面の地形の凹凸が目視できるようになった。20世紀になると実際に月に探査機を飛ばし、着陸機による観測や軌道からの観測によって月の内部構造さえも把握しようとしている。

本研究では、共通軌道（極軌道）を描く2つの探査機を月の上空に飛ばし、その2つの探査機の距離を測ることで重力分布や地下構造を推定するGRAIL（Gravity Recovery and Interior Laboratory）ミッションから得られる重力場データと、レーザ高度計を搭載した月探査機 Lunar Reconnaissance Orbiter（LRO）から得られた地形データをそれぞれ球関数展開し、それによって求めた係数を比較し、両者の相関の波長依存性に注目した。その結果、低次数では相関が低く観測され、高次数では高く観測された。これは月表面の長波長の地形（大まかな地形）については、月内部の流動性によってアイソスタシーが成り立っているが、短波長の地形（局地的な地形）はリソスフェアによって支えられておりアイソスタシーが成り立っていないことを示している。同時に、重力の観測限界に近い短波長の地形に関しては見かけ上相関が低くなることもわかった。

月の他に地球や火星などの地球型惑星における重力と地形の相関を比較し、それらの天体における重力異常、アイソスタシー補償の程度やリソスフェアの剛性について議論することも重要である。火星の場合、半径は地球と月の中間程度なので、月に比べて内部の流動性が高く、アイソスタシー補償はより高度に達成されていることが予測される。

相関の他に、地形がもたらす重力異常を評価する物理量として、両者の振幅比である「アドミッタンス」がある。これは月表面のうち、弾性体として振る舞い、地形の凹凸によってモホ面の凹凸に影響を与えることができる厚さ（本稿ではこれを「リソスフェア厚さ」と呼ぶ）を議論する上で重要な物理量である。

本稿では月の重力場データと地形データをもたらしした月探査衛星の紹介、そして実際に得られたデータからどのように相関やアドミッタンスを計算したか、最後にそれによって明らかになった月のリソスフェア厚等について地球と比較しつつ議論する。

目次

第 1 章：測定の原理

- 1-1. 月探査の歴史
- 1-2. GRAIL の観測原理

第 2 章：相関 Correlation

- 2-1. 相関の定義
- 2-2. 月の重力場と地形の相関
- 2-3. 火星の重力場と地形の相関

第 3 章：アドミッタンス Admittance

- 3-1. アドミッタンス Admittance とは何か
- 3-2. 様々なアイソスタシーモデルによる Admittance の計算
- 3-3. 曲げ剛性
- 3-4. 実際の Admittance

第 4 章：まとめと今後の課題

謝辞

参考文献

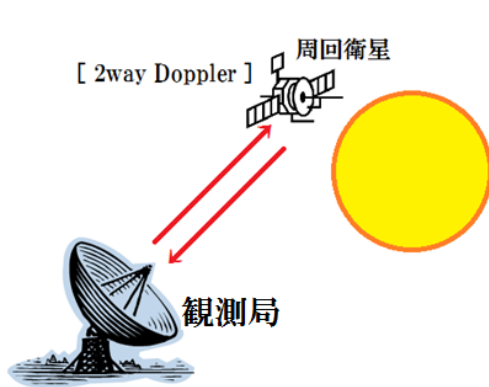
第 1 章：月の重力場と地形：測定の実理

1-1. 月探査の歴史

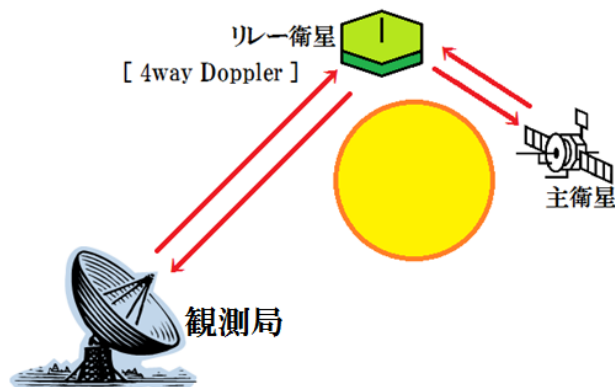
人工飛翔体を用いた本格的な月面調査は東西の冷戦時代から始まっていた。ソビエト連邦がルナ 2 号を打ち上げ、アメリカ合衆国がアポロ計画を開始するなど、宇宙開発戦争は月を巡っても白熱していった。しかしこれらの探査によって重要な科学的発見が多くなされ、ロケット技術や観測技術も向上していった。

冷戦が終わった 1990 年代、アメリカ航空宇宙局 NASA は、月の極地方に存在する水や、月表面の鉱物資源探査のために Lunar Prospector (LP) と呼ばれる月面探査機を開発した (Fig1)。その他にも月の全球的な地質構造や重力場、さらには磁場までも観測するという目的があった。LP の追尾では「2-way Doppler 観測」が採用された。地上に設置された観測局と周回衛星との視線速度によるドップラー偏移を観測データとして、月重力場モデルを構築した。しかしこの方法では、同期自転している月の裏側には電波が届かないため、実際に得られた重力場データは表側のものだけであった。

日本の宇宙航空研究開発機構 JAXA は、LP よりも高精度な月重力場モデルを得るために、Selenological and Engineering Explorer (SELENE 「かぐや」) と呼ばれる月周回衛星を打ち上げた (Fig2)。SELENE では、主衛星に加えて副衛星を周回させ、「4-way Doppler 観測」という方法を採用した。地上に設置された観測局の他に高高度のリレー衛星「おきな」を用い、信号を中継させることで、月の裏側の重力場の直接計測に成功した。



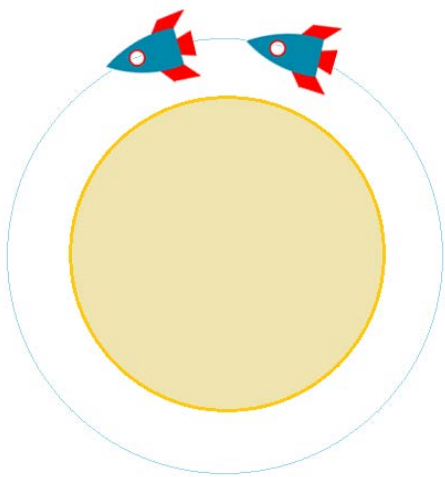
[Fig 1] : LP の観測原理



[Fig 2] : SELENE (かぐや) の観測原理

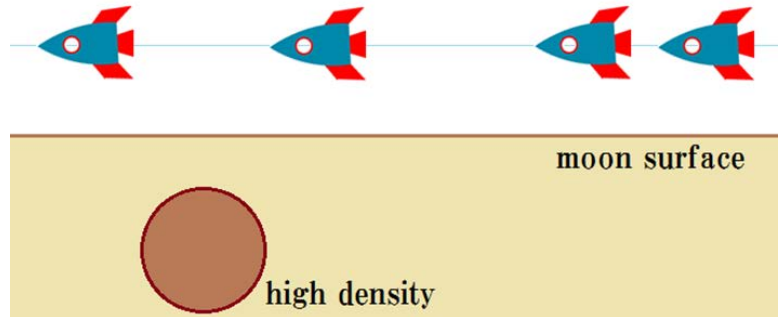
LP や SELENE は、地球上の観測局から送信された電波を月周回衛星で受信し、それをさらに地球に向けて送信することで、ドップラー偏移から視線方向の速度を計測し、月周辺の重力測定を行っている。LP では地上局から直接ドップラー観測を行ったが、SELENE ではリレー衛星を介して直接観測できない裏側の重力測定を行っている。

1-2. GRAIL の観測原理



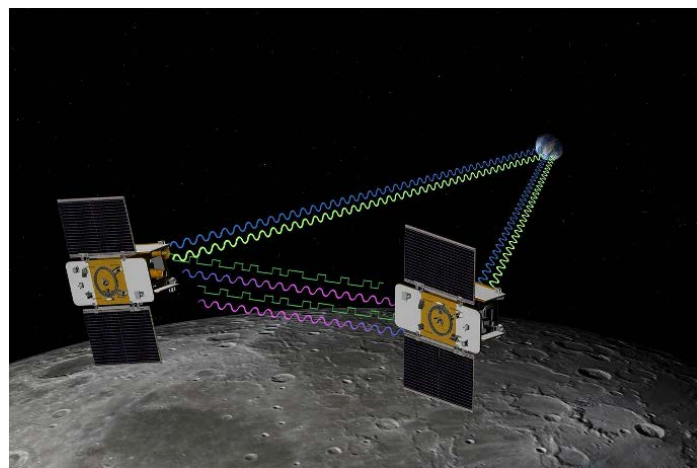
[Fig3] 月を周回する双子衛星のイメージ図 (左図)

[Fig4] 質量異常による双子衛星間の距離の伸縮 (下図)



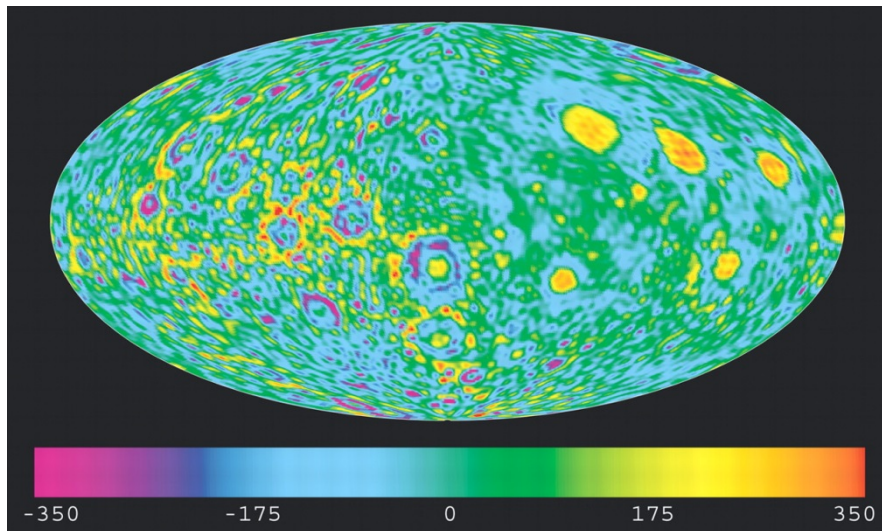
SELENE (かぐや) の登場によって月の裏側の重力場は直接観測できたが、周回衛星の高度が約 100 km と高いため、表裏ともに重力場の空間分解能は不十分であった。そこで敢行されたのが GRAIL ミッションである。このミッションに使われた衛星技術は、アメリカ航空宇宙局 NASA とドイツ航空宇宙センター (DLR) が開発して 2002 年に打ち上げられた、地球の重力場を詳細に観測するための衛星 Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) で使われた、低軌道衛星間トラッキングの技術を基にしている。

前述の通り、GRAIL は月の上空を極軌道に沿って飛行する双子衛星探査機である [Fig 3]。この双子衛星間の距離は、マイクロ波測距システムを用いて観測され、地下に密度の大きい構造が存在する場合、その周辺で 2 衛星間の距離は伸び、その逆の場合距離は縮まる [Fig4]。このデータを基に月の重力分布を均一な精度で全球的に測定することができる。



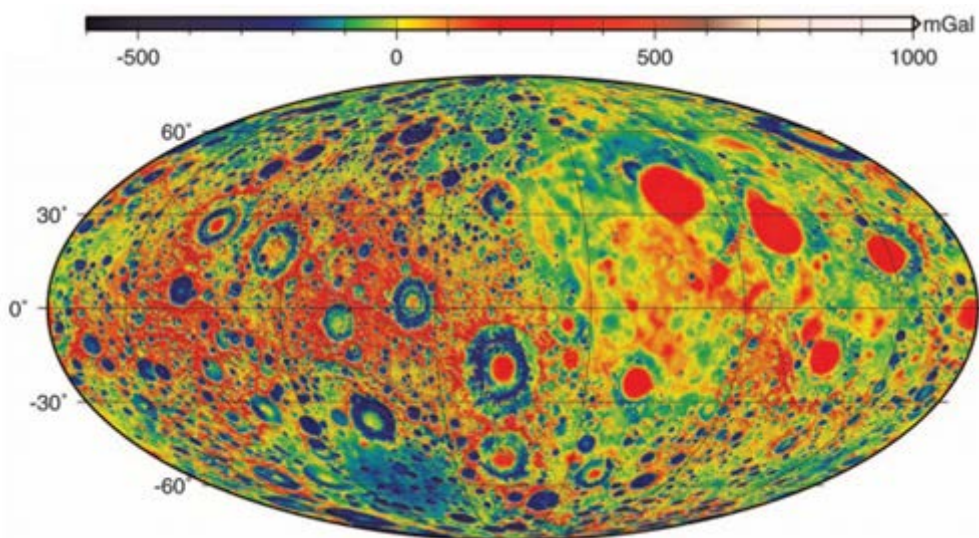
[Fig 5] GRAIL 衛星のイメージ図 (NASA による)

http://www.nasa.gov/images/content/574603main_grail20110722.jpg より引用



[Fig 6] SELENE (かぐや) による月表面の重力異常測定図 下の数値の単位は[mgal]
図の左側は月の裏側、右側は表側である。

<http://www.sciencemag.org/content/323/5916/900/F2.expansion.html> より引用

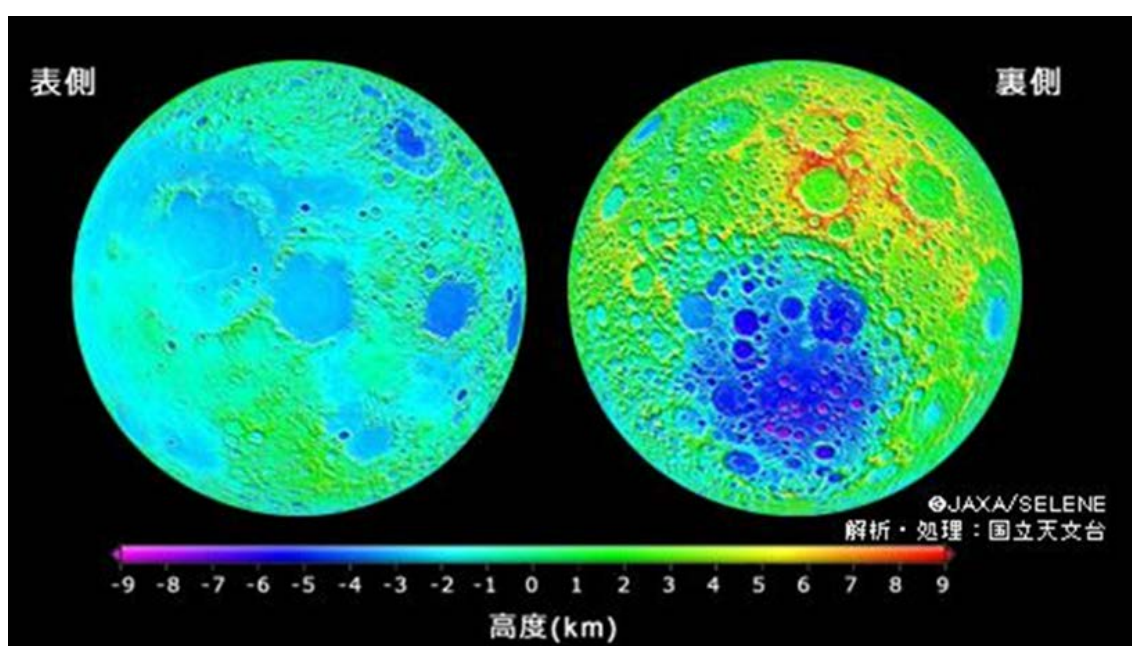


[Fig 7] GRAIL による月表面のフリーエア重力異常測定図 (Zuber et al., 2012)。Fig6 と同様、図の左側は月の裏側、右側は表側である。Fig.6 と比べて高解像度である。

Fig 6、Fig 7 より、月の表側に円形の正の重力異常が複数存在していることが確認できる。この部分は質量が集中しており、Mass Concentration (mascon) と呼ばれるが、その成因については次の章で紹介する。

1-3. 月の地形データ

本研究では LRO に搭載されたレーザ高度計による地形データを用いている。周回衛星から地表に向かってレーザパルスを発射し、その往復時間を測ることによって衛星と地表の距離が測定できる。その時、周回衛星の軌道が良くわかっているならば、距離から地表の高度（地形）が計測できるのである。Fig 8 は、SELENE（かぐや）のレーザ高度計によって取得された観測データを基に製作された月の地形（高度）図である。表側はのっぺりしており、裏側は高低の振幅が大きく細かい凸凹も多いことがわかる。裏側の南半球に見える大きなクレーターが、太陽系最大級と言われる南極エイトケン盆地である。



[Fig 8] 月の表側と裏側の地形（高度）図

<http://sr.jaxa.jp/report/2012/project03.html> より引用

一般的に地形高度と重力異常は正の相関を持つ。すなわち、山地や高地が存在すれば余剰質量による正の重力異常が生じる。しかし例外的に、Fig 6 や Fig 7 で示した mascon 部分では凹んだ地形が正の重力異常を示しており、両者は負の相関を示している。これはまだ月が冷却しきっていない状態で隕石が衝突し、モホ面が盛り上がりアイソスタシーが成り立った（フリーエア重力異常がほぼ消えた）後に、月内部から玄武岩質マグマが噴出することによって、正の質量異常が生じたためであると考えられている（Howard,1970）。表側では雨の海、晴れの海、危難の海、湿りの海、神酒の海等のマスコンが良く知られている。

第2章：重力と地形の相関 Topography-gravity correlation

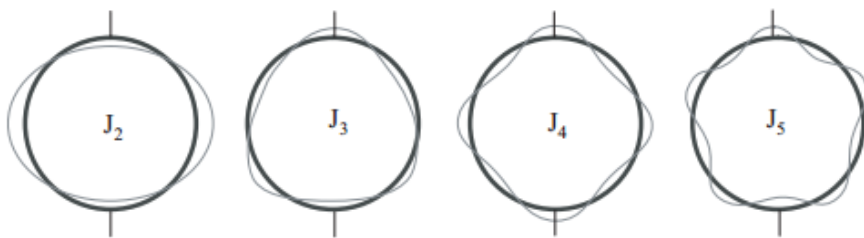
2-1. 重力場と地形の相関の定義

重力場や地形などの球面上に分布する情報は、3次元のラプラス方程式（調和方程式）の球座標での解である球面調和関数 $P_{\ell,m}(x)$ の展開係数として表すことができる。例えば地球の重力ポテンシャル $U(r, \theta, \varphi)$ は、球面調和関数 $P_{\ell,m}$ を用いて次のように展開される。

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (C_{\ell,m} \cos m\varphi + S_{\ell,m} \sin m\varphi) P_{\ell,m}(\cos \theta) \right\} \quad \dots(1)$$

ここで、 ℓ は次数、 m は位数と呼ばれ、 θ は余緯度、 φ は経度を表している。 r は地球中心からの距離、 R は地球の半径であるので地表では $R=r$ となる。 G は万有引力定数、 M は地球の質量を示す。

緯度に依存しない成分（zonalな成分）は、次数 ℓ の球面調和関数（球関数） $P_{\ell,0}$ の係数として $C_{\ell,0}$ または、符号を変えて J_{ℓ} 成分と呼ばれる。また、重力を球関数展開した時の係数である $C_{\ell,m}$ や $S_{\ell,m}$ をストークス係数と言う。Fig 9では様々な ℓ について球関数の緯度依存性のイメージを示した。天体の重力場や地形をこの関数で展開する際に、最大の次数が高いほど、より詳細な重力場や地形を表現することができる。



[Fig 9] 低次の zonal な球関数における緯度依存性。

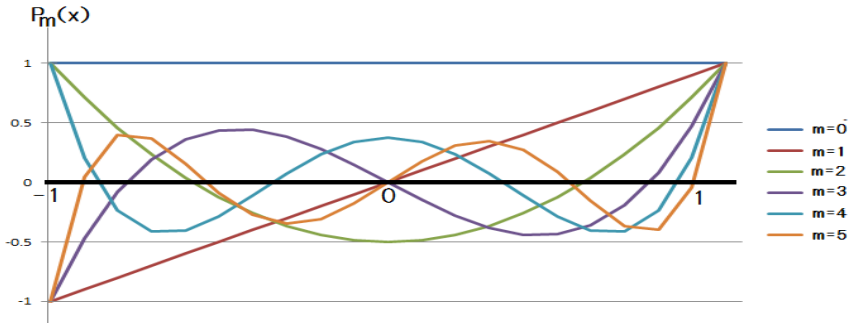
地球内部物理学 講義ノート（日置幸介）より引用

一般に球面上で定義される、ある関数 $f(\theta, \varphi)$ を、正規化した球関数で展開した時の係数 $(C_{\ell,m}, S_{\ell,m})$ は、以下の式で計算される。

$$\begin{pmatrix} C_{\ell,m} \\ S_{\ell,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} P_{\ell,m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \quad \dots(2)$$

また、式(2)中の $P_{\ell,m}(\cos \theta)$ は、ルジャンドル陪関数 $P_{\ell}^m(\cos \theta)$ を用いて次のように表すことができる。

$$P_{\ell,m}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2(2\ell + 1)(\ell - m)!}{\varepsilon_m(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases} \quad \dots(3)$$

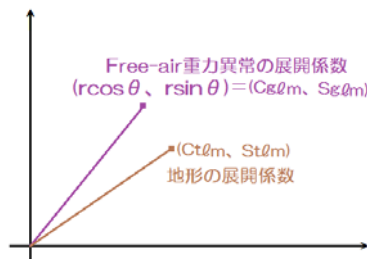


[Fig 10] $m = 5$ までのルジャンドル陪関数の概形

以上のことを踏まえて、球面上のある次数と位数の重力場と地形を示す関数の展開係数の余弦成分と正弦成分を成分とする2つの二次元ベクトル (C_g, S_g) 、 (C_t, S_t) の間の角度から両者の相関 (correlation) が計算される [Fig 11]。数式で表すと、(4)式の間数 $F_{\ell}(\Omega)$ は、天体球面のある位置 $\Omega(\alpha, \beta)$ を中心とする地形とフリーエア重力異常のアドミッタンス (合致度) を示す。これを(5)式のように規格化した関数 $R_{\ell}(\Omega)$ が(二つのベクトルの成す角の余弦に相当)、この章で議論する相関係数である (青島, 2000)。

$$F_{\ell}(\Omega) = \frac{\sum(Cg_{\ell,m}Ct_{\ell,m} + Sg_{\ell,m}St_{\ell,m})}{\sum(Ct_{\ell,m}^2 + St_{\ell,m}^2)} \quad \dots(4)$$

$$R_{\ell}(\Omega) = \frac{\sum(Cg_{\ell,m}Ct_{\ell,m} + Sg_{\ell,m}St_{\ell,m})}{\sqrt{\sum(Cg_{\ell,m}^2 + Sg_{\ell,m}^2) \times \sum(Ct_{\ell,m}^2 + St_{\ell,m}^2)}} \quad \dots(5)$$



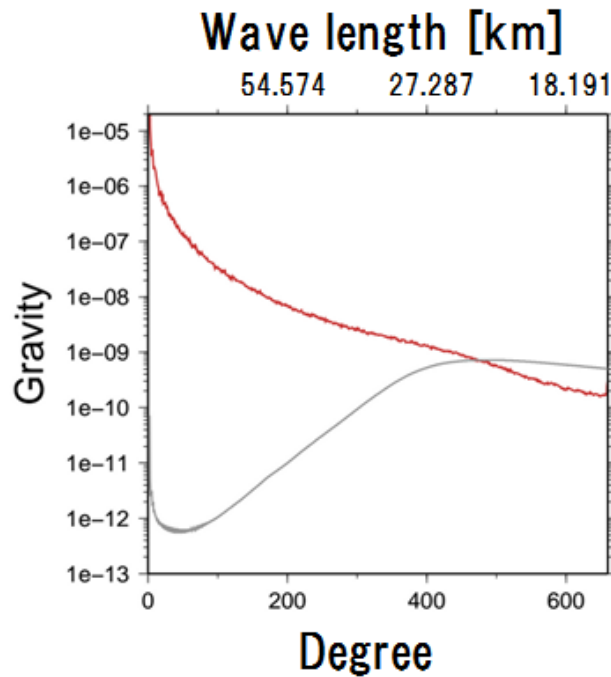
[Fig 11] 重力異常と地形の展開係数のある次数 l と位数 m の値を示すベクトル。

2-2. 月の重力場と地形の相関

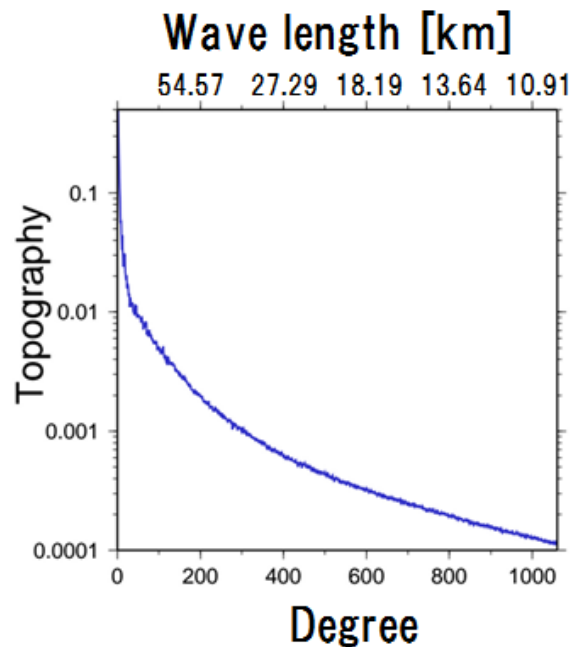
2-1 節で述べた原理を踏まえ、GRAIL による重力場データと LRO による地形データの次数毎の相関を計算した。Fig 12 中の赤線で示された線は、GRAIL で推定された月重力場のストークス係数の大きさ（ある次数において、様々な位数を持つ係数全体について自乗和の平均の平方根を取ったもの）を次数の関数として表したものである。係数はカウラの法則にしたがって次数が大きくなるにしたがって小さくなってゆく（橋本, 2013）。一方灰色の線は公開されている誤差の大きさを表しており、計測が難しい高次（短波長）成分ほど大きくなる。450 次程度付近までは、信号の強さ（赤線）が誤差（灰色線）よりも上回っているが、それより高次数になると赤線は灰色線よりも下回っており、重力データに関しては意味のある係数が推定されていないことが示唆される。

Fig 13 中の青線は、LRO のレーザ高度計による月の地形データを球関数展開した時の係数の大きさ(M. Wieczorek の HP より、LRO_LTM01_PA_1080_SHA.TAB のデータを download)を重力と同様に次数ごとに比較したものである。これも重力と同様に次数が高くなると小さくなっていく。なお誤差については本モデルに関しては情報が無い。

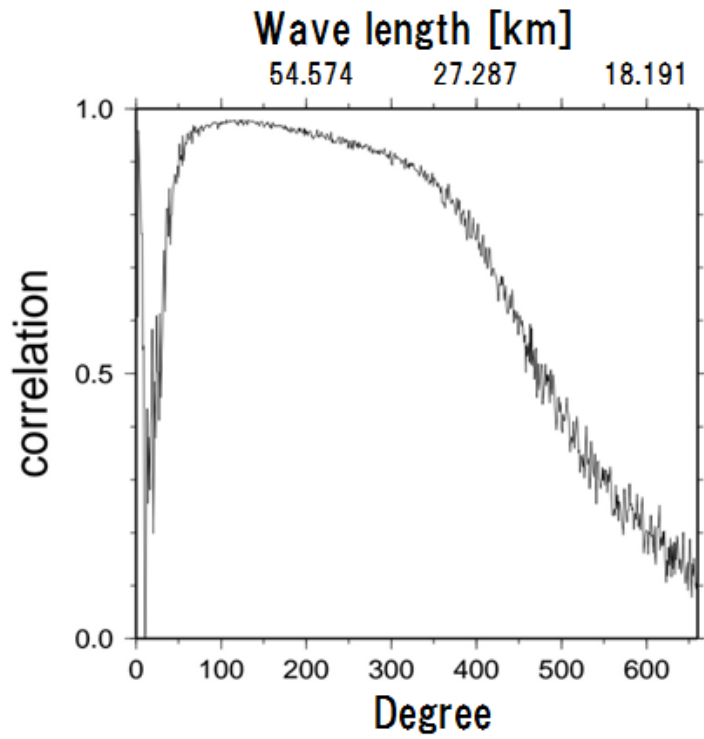
月の重力場と地形の相関係数 (correlation coefficient) の次数毎の値を Fig 14 に示す。このグラフから、低次（長波長）で相関が低いことが分かる。この原因は、月表面の長波長の地形（大まかな地形）については、内部の流動性によってアイソスタシーが成り立っているために、地形と重力の相関が低くなっているためであろう。また、10 次付近で相関が負になるのは、地形と重力が負の相関を持つ mascon の間隔が 10 次の球関数の波長と一致することを反映しているためであろう [Fig 15]。100~400 次にかけては、相関は 1 に近く、短波長の地形（局地的な地形）についてはアイソスタシーが成り立っていないために、重力と地形が大きな相関を持つことを意味している。さらに高次になると、本来の地形と重力の相関は高いはずであるが、重力場係数の推定誤差が大きくなるため、相関も低下しているものと思われる。



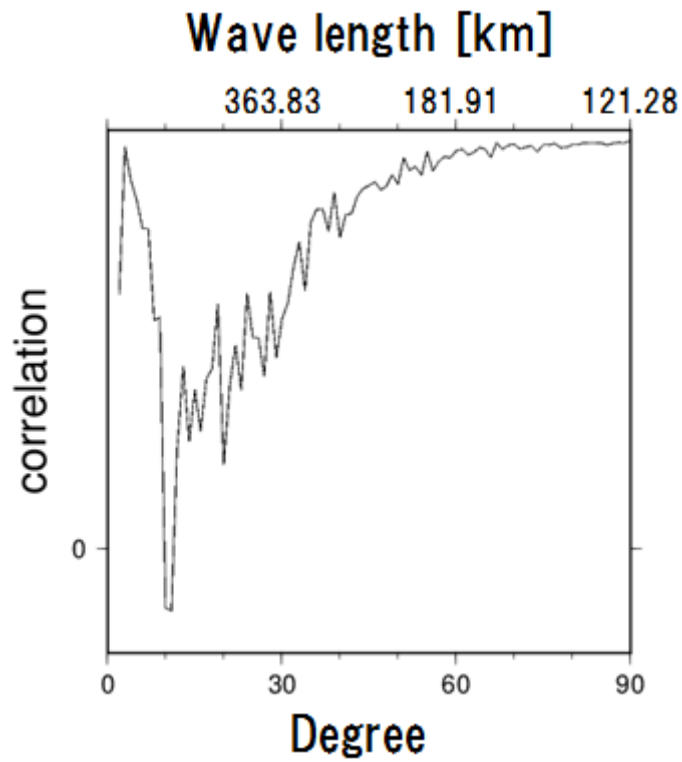
[Fig 12] 月重力のストークス係数の次数毎の平均的な大きさの比較（赤線）。灰色の線は誤差を示す。500 次程度より高次側では誤差が推定値の大きさを上回る。
NASA Goddard Space Flight Center のデータ gggrx_0660pm_sha.tab より作成



[Fig 13] 月の地形を球関数展開した時の係数の大きさの次数による違い。
LRO_LTM01_PA_1080_SHA.TAB より作成



[Fig 14] 重力場と地形の間の相関係数を(4)式にしたがって計算したもの。



[Fig 15] Fig 14 の低次部分を拡大したもの

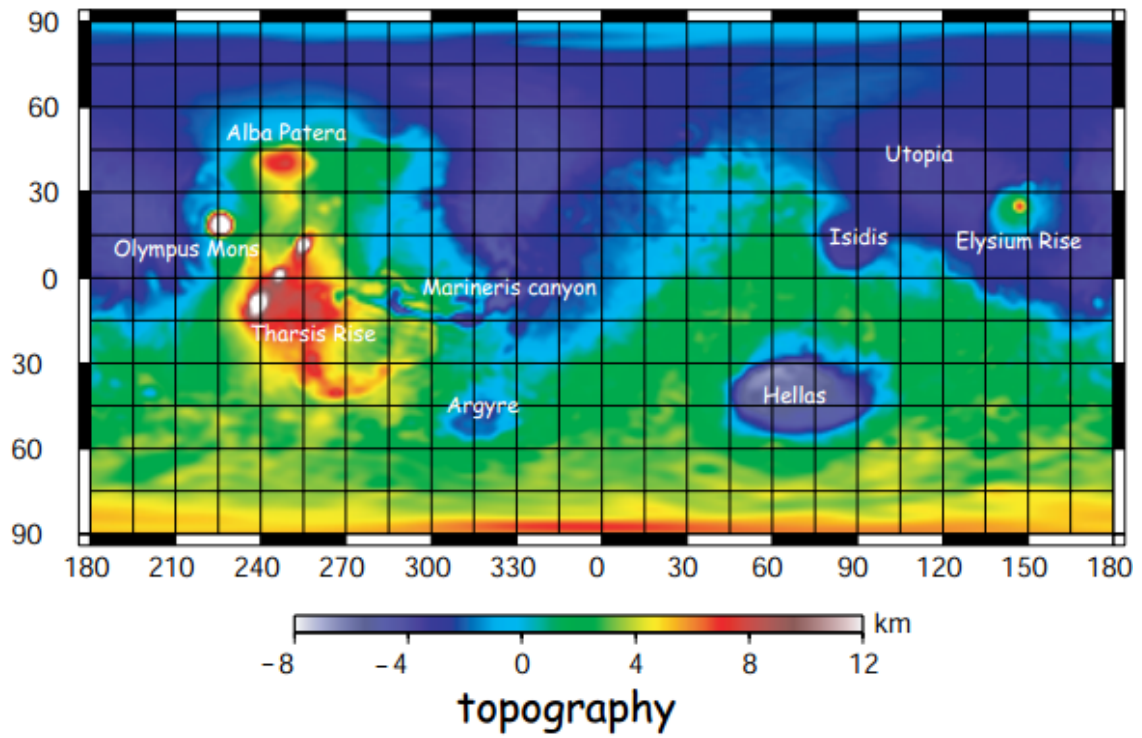
2-3. 火星の重力場と地形の相関

他の太陽系惑星との比較対象として、火星における重力場と地形のデータを NASA の Planetary Data System からダウンロードし、それらの相関を計算した。

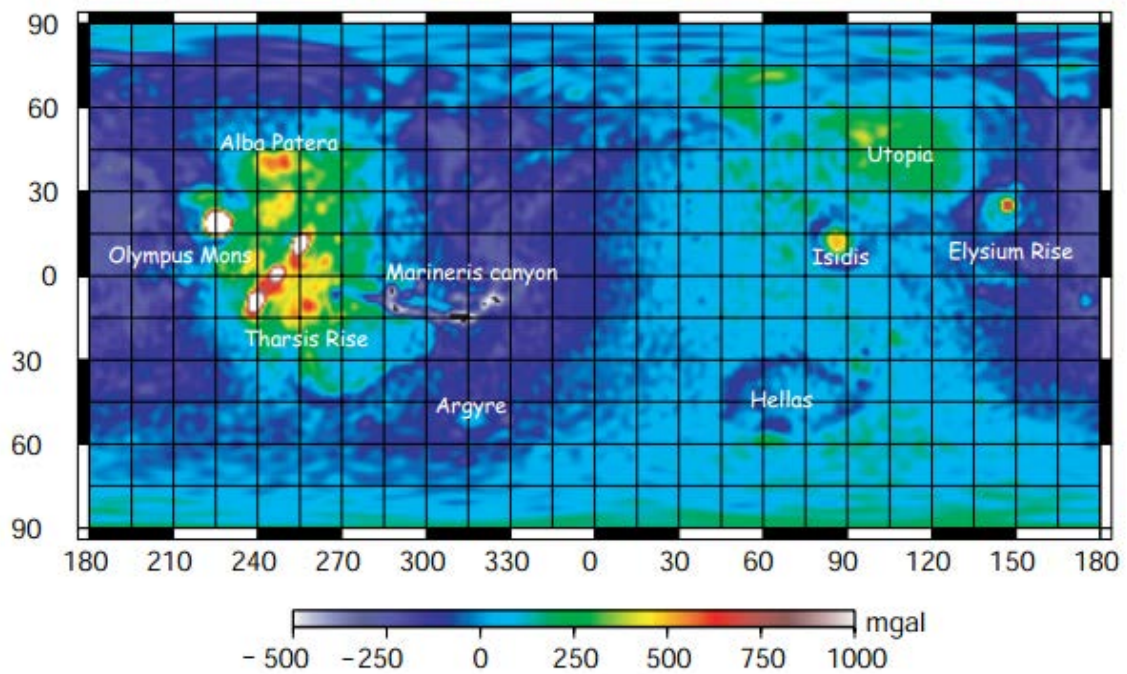
Fig 16 は、火星の高度分布を示している (松尾,2007)。北半球では低地が多く、かつては海が存在していたという説がある (松尾,2007)。南半球では高地が目立ち、東側には火星最大のクレーターである Hellas 盆地が広がっている。Fig 17 は、火星のフリーエア重力異常図を示している (松尾,2007)。北半球と南半球の地形高度の差は重力異常には表れていないことがわかる。これより火星でも、長波長の地形については全体的にアイソスタシーが成り立っていることが分かる。

Fig 18 と Fig 19 は、NASA の火星探査機 MGS(Mars Global Surveyor)に搭載された、重力測定装置 USO(Ultra Stable Oscillator for Doppler measurements)と地形測定装置 MOLA(Mars Orbiter Laser Altimeter)によるデータである (重力モデルは ggm1041c.sha より、地形データは gtm090aa.sha より引用)。火星の場合も、いずれの係数もカウラの法則にしたがって次数が大きくなるにしたがって小さくなってゆくことが分かる (橋本、日置, 2013)。

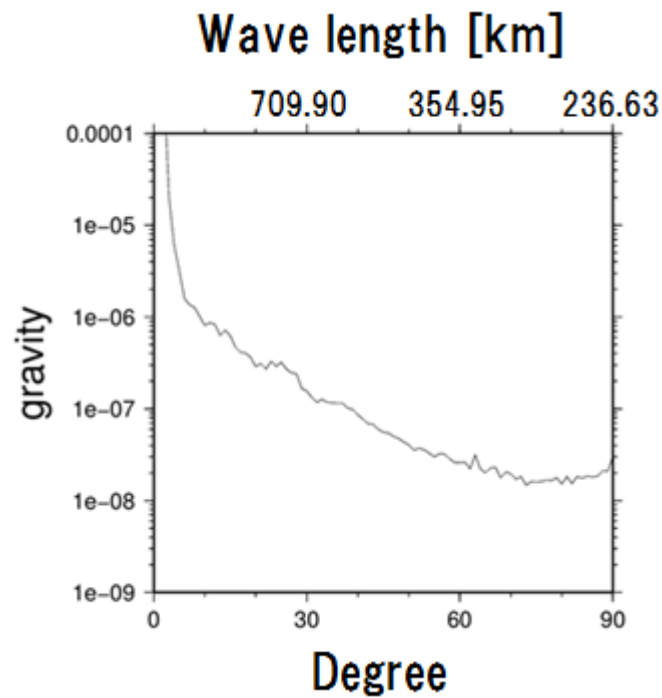
また Fig 20 は火星におけるそれらの相関を表す。これより、火星の相関係数は、月に比べて値が全体的に低いことが分かる。月と同様に、低次数 (長波長) で相関が低いのは、アイソスタシーを反映しているためである。アイソスタシーが成り立つと、モホ面の凹凸 (ブーゲー異常) は観測されるが、地表とモホの質量異常が相殺され、フリーエア異常はほぼゼロになるのである [Fig 21]。次数が上がるに従って両者の相関は高くなるが、主に重力場の誤差が大きくなるため 50 次を超えるあたりから見かけ上徐々に相関は低下する。



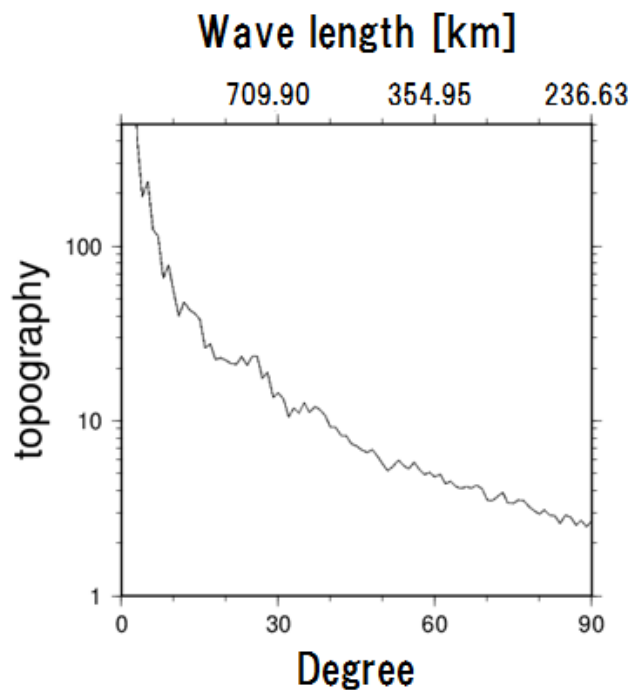
[Fig 16] 火星の高度分布 (松尾, 2007)



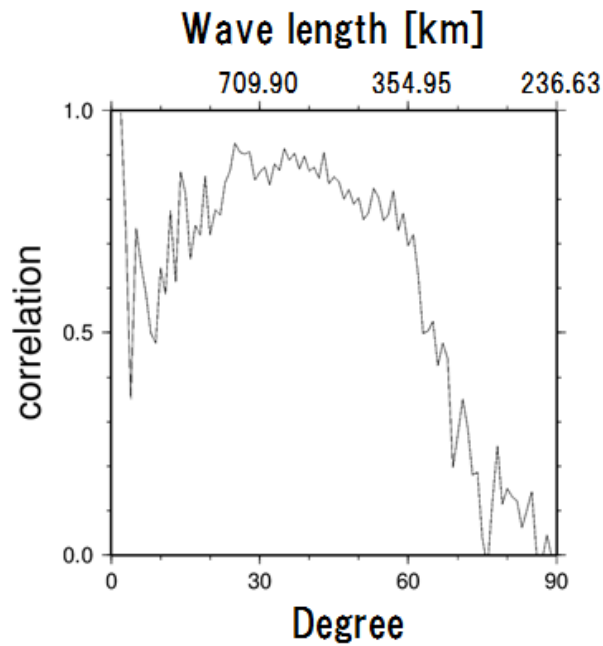
[Fig 17] 火星のフリーエア重力異常図 (松尾, 2007)



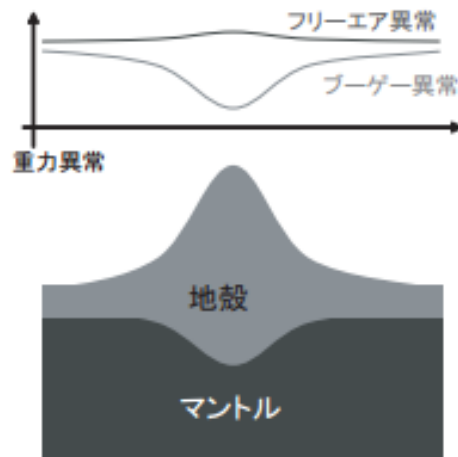
[Fig 18] MGS/USO を用いて決定された火星の重力場データ。NASA/PDS からダウンロードしたストークス係数のデータである ggm1041c.sha を用いて、係数の大きさの次数依存性をプロットしたもの。



[Fig 19] MOLA の測定値によって作られた火星地形モデルを球関数展開した係数の大きさの次数依存性を示す図。重力と同様に NASA/PDS からダウンロードした地形モデル gtm090aa.sha を使用した。



[Fig 20] 火星の重力場と地形の間の相関係数を(4)式にしたがって計算したもの。低次はアイソスタシーのため相関が低い、30-50次では高い相関を示す。50次を超えると重力場の推定誤差が大きいため、見かけ上相関が低下する。

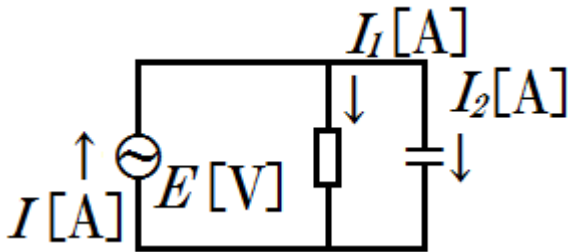


[Fig 21] アイソスタシーと地形の関係。アイソスタシーが成り立っていれば、地表の正の余剰質量がモホが深いことによる質量欠損とバランスするため、フリーエア重力異常は小さくなる。地球内部物理学 講義ノート (日置幸介) より引用

第3章 : Admittance

3-1. Admittance とは何か

そもそもアイソスタシーとは、惑星などの天体の深部にある高密度の岩石が流体のように振る舞うことによって、地表の質量荷重または欠損が浮力によって支えられる現象のことをいう。そして、その流動する部分の上部には、弾性体として振る舞う部分があり、その厚さによってモホ面が凹凸し、重力異常が信号として現れる。この弾性体の厚さを議論するために「アドミッタンス」という物理量を用いる。



[Fig 21] R-C 並列回路

「アドミッタンス (Admittance)」は、元々電気工学用語で、交流回路における電流と電圧の比であり、電流の流れやすさを表す物理量である。電流の流れにくさを意味する「インピーダンス (impedance)」とは互いに逆数の関係にある。

Fig 21 で示した回路全体におけるアドミッタンス (単位は「ジーメンズ[S]」) を Z [S]、インピーダンスを R [Ω]、交流電圧の起電力を E [V]、交流電圧に流れる電流を I [A]とすると、以下の式が成り立つ。

$$Z = R^{-1} = \frac{I}{V} \quad \dots(6)$$

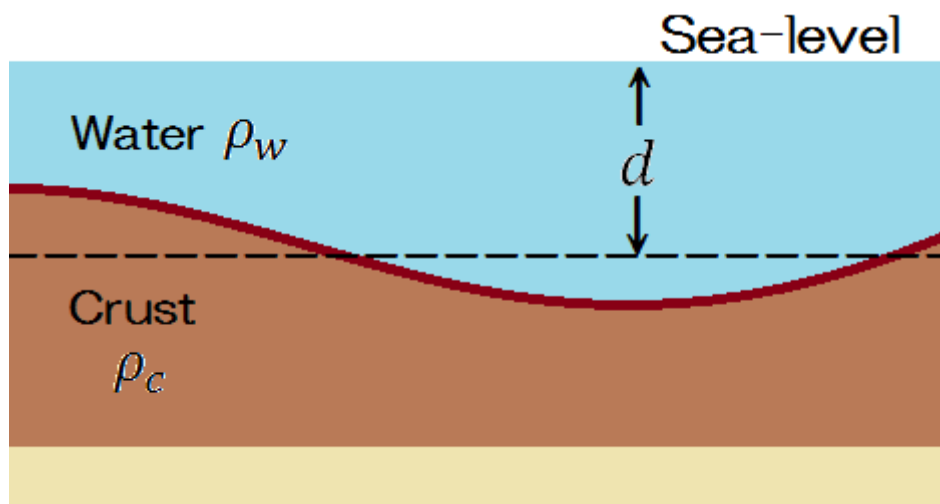
すなわち、電気工学におけるアドミッタンスとは、「回路全体にかかる電圧に対して、回路全体に電流がどれだけ流れるか」を示す物理量である。それに対して、地球物理学における重力と高度のアドミッタンスとは、「地形の凹凸の影響によって、どれだけ重力異常が観測されるか」を示す物理量である。ここで地形の凹凸を表す関数を $H(k)$ 、重力異常を $\Delta g(k)$ とする (いずれもフーリエ変換後の関数のため、波数 k に依存する) と、これらによるアドミッタンス $Z(k)$ は、以下のように表され、単位は mgal/km とすることが多い。

$$Z(k) = \frac{\Delta g(k)}{H(k)} \quad \dots(7)$$

3-2. 様々なアイソスタシーモデルにおける Admittance の計算

アイソスタシーには様々なモデルが存在し、そのモデル毎に予測される Admittance の計算式が異なる。

(1) Uncompensated model



[Fig 22] アイソスタシーが働いていない (Uncompensated model) 場合のイメージ図

地形の凹凸によるモホ面の凹凸が無い (Uncompensated) 場合を考える。

天体に海がある場合の、海水の密度を ρ_w 、地殻の密度を ρ_c とすると、海水面から観測された波数 k の地形 $H(k)$ が作る重力異常 $\Delta g(k)_{topo}$ は、次のように表される。

$$\Delta g(k)_{topo} = 2\pi G(\rho_c - \rho_w)H(k)e^{-kd} \quad \dots(8)$$

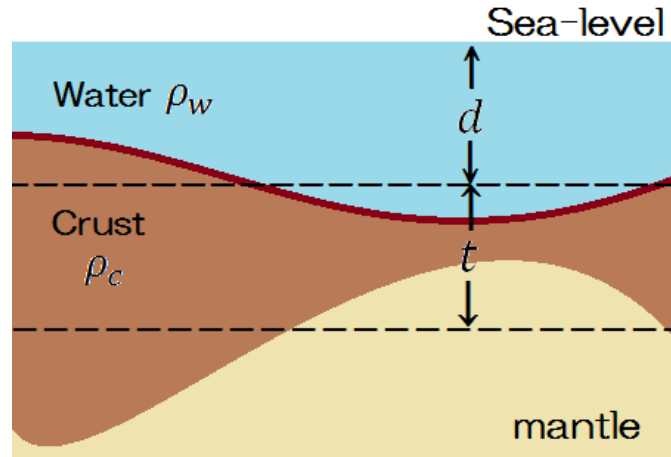
ここで G は万有引力定数、 d は平均水深を意味する。

これより、このモデル下でのアドミッタンス $Z(k)_u$ は、以下のように表される。

$$Z(k)_u = \frac{\Delta g(k)_{topo}}{H(k)} = 2\pi G(\rho_c - \rho_w)e^{-kd} \quad \dots(9)$$

平均水深 d が大きい、または波数が大きい (波長が短い) ほど、アドミッタンスは小さくなる。

(2) Compansated model (Airy model)



[Fig 23] Compansated model (Airy model) のイメージ図

同じ密度の物質が山の高い場所ほど地下深くまで「根」を持っているエアリー・ハイスカネンモデル (Airy model) の場合のアドミッタンスについて考える [Fig 23]。

まず、表面地形による重力異常 $\Delta g(k)_{topo}$ は、(8)より与えられるものと同様であるが、アイソスタシー補償によって生じたモホの凹凸がもたらす重力異常 $\Delta g(k)_{comp}$ は、次のように表すことができる。

$$\Delta g(k)_{comp} = 2\pi G(\rho_m - \rho_c)R(k)e^{-k(d+t)} \quad \dots(10)$$

ここで ρ_m はマンツルの密度、 t は地殻の平均厚さ、 $R(k)$ はアイソスタシー補償によるモホ面の凹凸を表す関数 $r(x)$ をフーリエ変換したものであり、 $R(k)$ と $H(k)$ の間には、以下のような関係が成り立つ。

$$R(k) = -H(k) \frac{(\rho_c - \rho_w)}{(\rho_m - \rho_c)} \quad \dots(11)$$

全重力異常値 Δg_{total} は、モホの凹凸と表面の凹凸の寄与の和として以下のように表される。

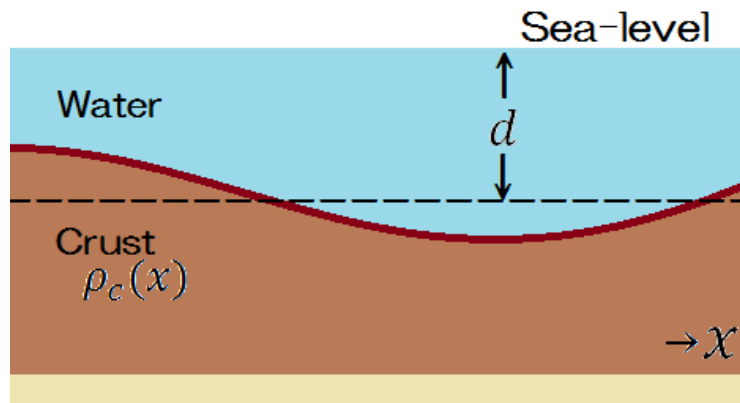
$$\Delta g_{total} = \Delta g_{topo} + \Delta g_{comp} \quad \dots(12)$$

以上から、このモデル下でのアドミッタンス $Z(k)_A$ は次のように表される。

$$Z(k)_A = \frac{\Delta g(k)_{total}}{H(k)} = 2\pi G(\rho_c - \rho_w)e^{-kd}(1 - e^{-kt}) \quad \dots(13)$$

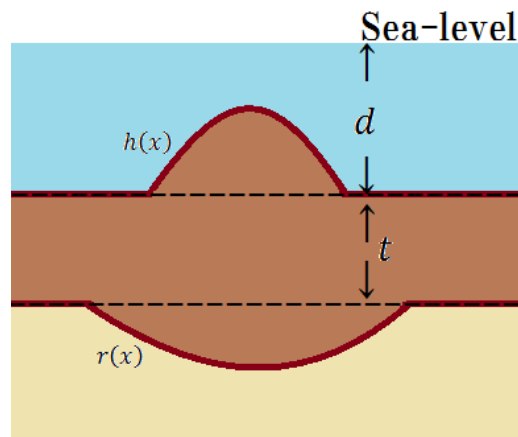
(3) Elastic Plate model

エアリー・ハイスカネンモデルの他に、モホ面の深さは一定だが、標高に応じて近くの密度が変化する「プラットモデル (Pratt model)」も存在する [Fig 24]。



[Fig 24] Pratt model のイメージ図。地殻の密度は位置 x の関数となる。

現在では、Airy model と Pratt model が融合した「弾性板モデル(Elastic Plate model)」が現実に近いと考えられている [Fig 25]。すなわち、地殻の凹凸によるモホ面の「根」がマントルとの密度差による浮力のほかにリソスフェアの弾性によっても支えられているという model である。



[Fig 25] Elastic Plate model のイメージ図。地形による余剰質量は、モホの凹凸による浮力だけでなく弾性プレートによっても支えられている。

この融合 model のアドミッタンス Z_E は、次のように表される。

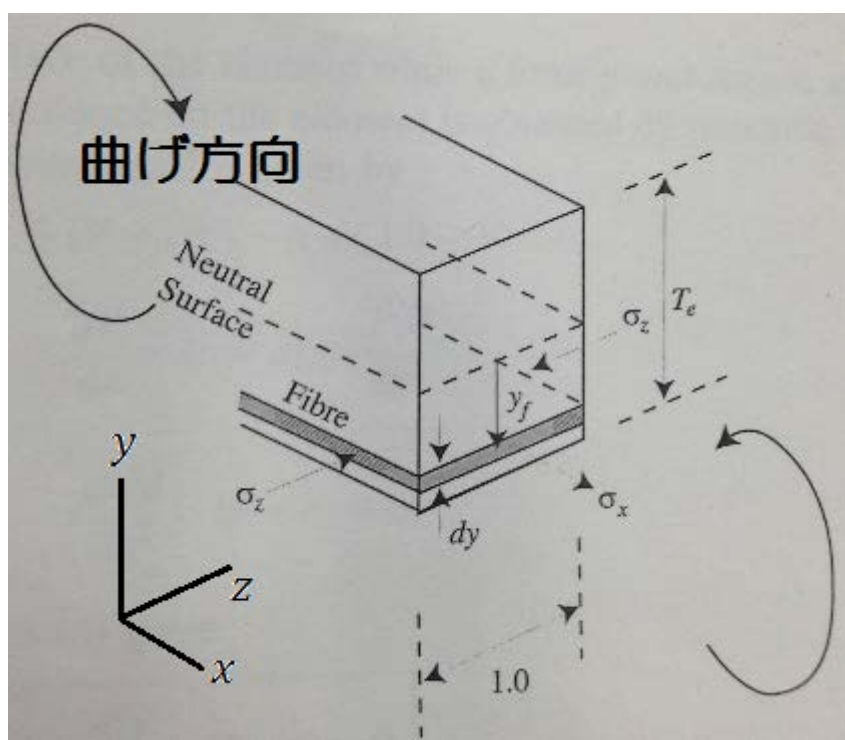
$$Z(k)_E = 2\pi G(\rho_C - \rho_w)e^{-kd}(1 - \phi e^{-kt})$$

…(14)

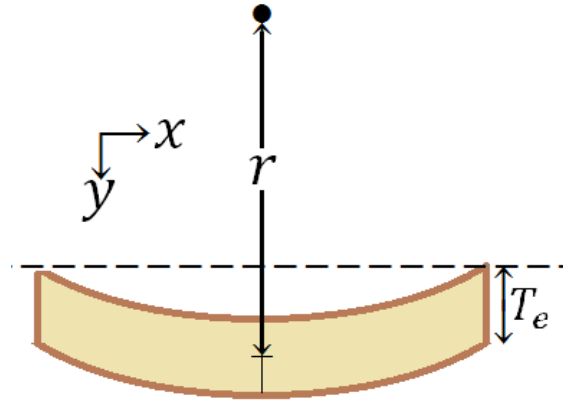
月の場合、海はなく、かつ衛星で計測したデータを基に作られた重力場モデルを月の基準面における重力値として計算したものをを用いるので、 $\rho_w = 0$ 、 $d = 0$ として考えて良い。なお ϕ の意味については次の章で詳しく述べる。

3-3. 曲げ剛性 (flexural rigidity)

前頁にある式(14)中の ϕ は、様々な波長を持った力に対する内部物質の曲げ剛性（屈曲）の影響を鑑みるために必要な係数である。高い剛性はアイソスタシー補償を妨げるため、アドミッタンスは大きくなる。 ϕ はアイソスタシーがある程度成り立つことによってアドミッタンスを小さくするファクターであるので、仮に「減衰係数」と呼ぶことにする。表層物質が硬質（リソスフェアが厚い）であるほど、減衰係数は小さくなりアドミッタンスは大きくなる。逆にリソスフェアが薄いとアイソスタシーが効くようになり、アドミッタンスは減衰して小さくなるのである。



[Fig 26] 梁部材（弾性体）をトルクによって屈曲させるイメージ図(Watts, 2001)。



[Fig 27] 屈曲させた時の梁（弾性体）のイメージ図

一般的に、「曲げ剛性」とは梁部材の曲げにくさを表す物理量である[Fig.26]。月の表面部分のうち、弾性体としてふるまい、流動しない部分の厚さ（弾性厚さ）を T_e 、単位長さの幅を持つ弾性梁の中立軸面から Fig 26 中の「Fibre」の領域までの距離を y_f 、Fig 26 中に示す x, y, z 方向における応力をそれぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ とする。

ここで、Fibre を Fig 26 中の矢印の方向に曲げるために必要な力 dF は、以下のように表される。

$$dF = \sigma_x dy \times 1.0 = \frac{E y_f}{r(1 - \nu^2)} dy \quad \dots(15)$$

式(15)中の E は弾性体のヤング率、 r は屈曲半径、 ν はポアソン比を示す。

次に、力 dF によって弾性体のFibre部分を曲げるために必要なモーメント（トルク） dM は、以下のように表される。

$$dM = dF \times y_f = \frac{E y_f^2}{r(1 - \nu^2)} dy \quad \dots(16)$$

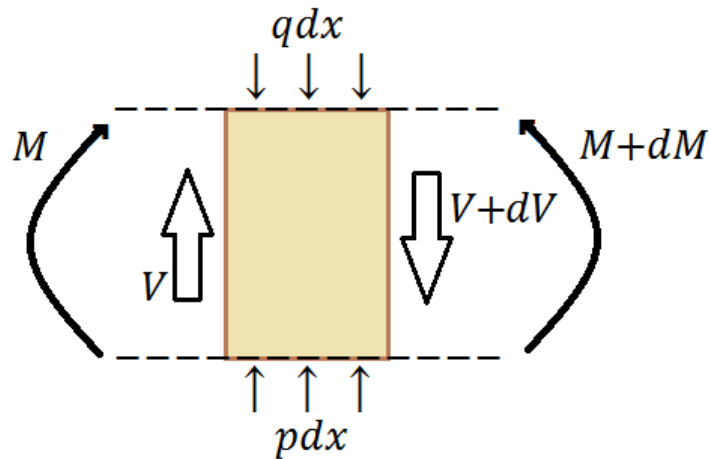
以上より、厚さ T_e の弾性体を曲げるために必要なモーメント（トルク） M は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} M &= \int_{\frac{T_e}{2}}^{-\frac{T_e}{2}} dM = \frac{E}{r(1 - \nu^2)} \int_{\frac{T_e}{2}}^{-\frac{T_e}{2}} y_f^2 dy \\ &= \frac{-ET_e^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{1}{r} \equiv -D \frac{1}{r} \end{aligned} \quad \dots(17)$$

式(17)中の D は「曲げ剛性」を表し、屈曲半径の逆数 $1/r$ は「曲率」を示す。

ここで弾性体の曲げ曲率は、Fig 27 より、 dy/dx が微小であることを考慮して、以下のような近似として表される。

$$\frac{1}{r} = \frac{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \quad \dots(18)$$



[Fig 28] 屈曲モーメント M と弾性体の上下から受ける圧力 q, p との関係

さらに、Fig 28 のような、屈曲した弾性体の一部において、微小体積当たりのモーメント（トルク）のつりあいは、以下のように表される。

$$q dx + (V + dV) - p dx - V = 0 \quad \dots(19)$$

上の式(19)中の V は、微小体積あたりのモーメント（トルク）を表しており、次の式を満たしている。

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \dots(20)$$

以上、式(17)～(20)より、単位面積当たりのモーメント（トルク）は弾性体の上下から受ける圧力 q, p の差に相当するので、以下の式が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= \frac{d^2M}{dx^2} = p - q \\ \therefore D \frac{d^4y}{dx^4} + (p - q) &= 0\end{aligned}\quad \dots(21)$$

また、月の地殻とマン托ルの密度をそれぞれ ρ_m 、 ρ_c とし、 $p = \rho_m y g$ 、 $q = \rho_c y g$ とするならば、式(21)は次のように書き替えられる。

$$\therefore D \frac{d^4y}{dx^4} + (\rho_m - \rho_c) y g = 0\quad \dots(22)$$

3-2 節 (3) で述べた Elastic Plate model の場合、アイソスタシーは地形の凹凸と表層物質（地殻とマン托ル）の密度差によって補償される。よって、モホ面の起伏による効果による弾性体のトルクと地形の凹凸による効果による弾性体のトルクが釣り合っているため、式(22)から、次の式が成り立つ。

$$D \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (\rho_m - \rho_c) y g = (\rho_c - \rho_w) g \cdot h \cos(kx)\quad \dots(23)$$

この式(23)を満たす y (y 軸方向への屈曲) は、以下の通りである。

$$y = \frac{(\rho_c - \rho_w) \cdot h \cos(kx)}{(\rho_m - \rho_c)} \left[\frac{Dk^4}{(\rho_m - \rho_c)g} + 1 \right]^{-1} \equiv \frac{(\rho_c - \rho_w) \cdot h \cos(kx)}{(\rho_m - \rho_c)} \cdot \phi\quad \dots(24)$$

上の式(24)中の ϕ が、前述のアドミッタンスの「減衰係数」に相当する。すなわちこの係数は、地殻の凹凸によるモホ面の「根」がマン托ルとの密度差による浮力のほかにリソスフェアの弾性によっても支えられているために考慮しなければならない補正值である。

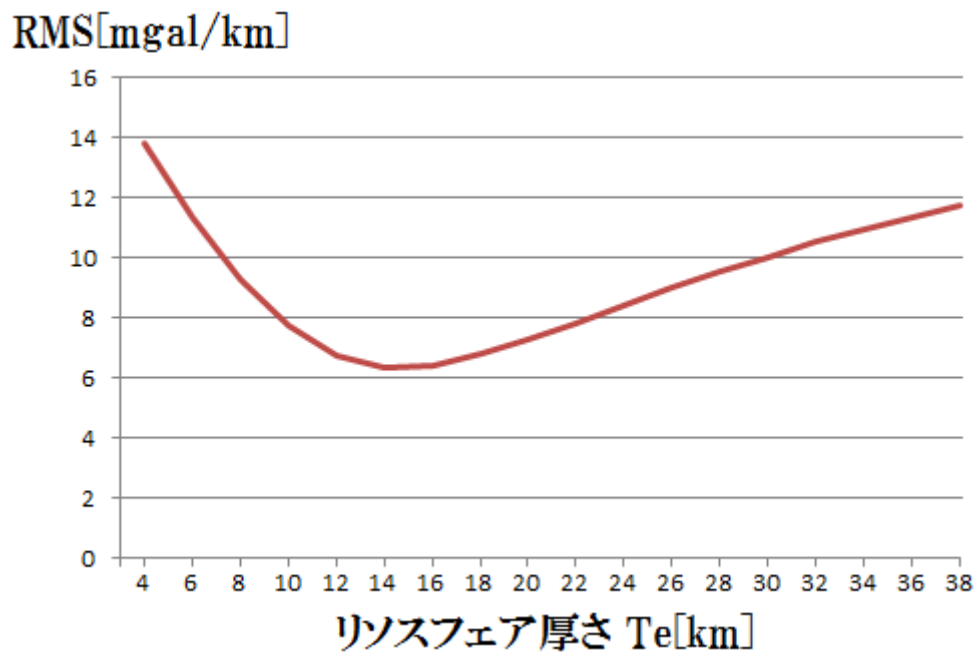
これ以降、「月表面のアドミッタンス」は Elastic plate model の場合のものこととし、その理論値には、アドミッタンス $Z(k)_E$ の式(14)中に、 $\rho_c = 2.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ 、 $\rho_w = 0$ 、 $d = 0$ を、曲げ剛性 D の式(17)に、ヤング率 $E = 30 [\text{GPa}]$ 、Poisson 比 $\nu = 0.25$ を、減衰係数 ϕ の式(24)中に、密度コントラスト $(\rho_m - \rho_c) = 0.4 [\text{kg/m}^3]$ 、月の重力加速度 $g = 1.623 [\text{m/s}^2]$ を代入したものを用いる。なお、月においては波数 k と球関数の次数 n には次の関係が成り立つ。

$$\text{波数 } k = \frac{2\pi n}{\text{月の半径}} = \frac{2\pi n}{1.73 \times 10^6} \quad \dots(25)$$

3-4. 重力と地形データから推定した月のアドミッタンス

月表面のアドミッタンスの理論値 $Z(k)_E$ の式中にある物理量の内、月地殻平均密度を既知とすると、未知の変数はリソスフェア厚さを表す Te のみである。つまり実際に GRAIL の重力場データと LRO の地形データから得られるアドミッタンスの観測値と理論値とを比較することにより、 Te を拘束できることを意味する。

Fig 29 は Te の値を 4 km から 38 km まで 2 km ごとに変えて、その時のアドミッタンスの観測値と計算値を 400 次までのすべての次数で取った時の残差の RMS (二乗平均平方根) をグラフに描いたものである。RMS はミスフィットの尺度であり、小さい方が観測値と計算値に近いことを意味する。



[Fig 29] リソスフェア厚さを変えた時の、アドミッタンスの観測値と計算値の残差 RMS。

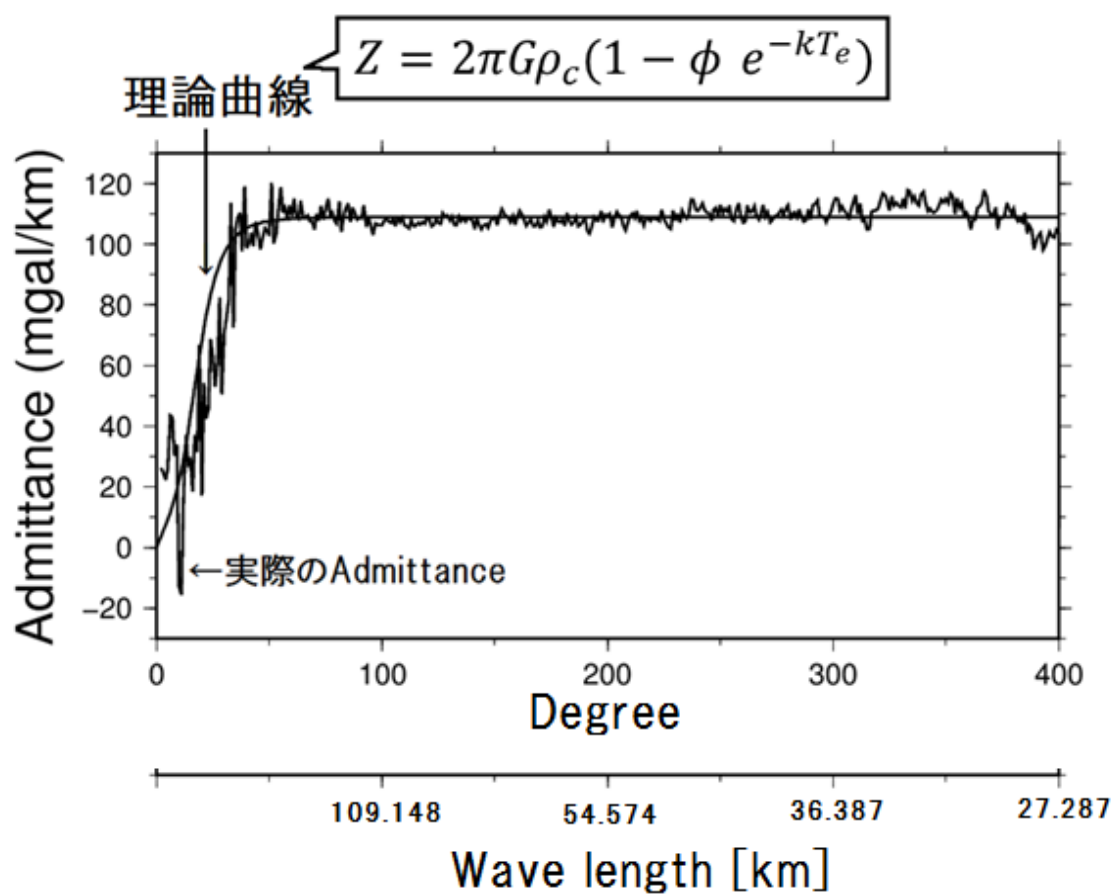
アドミッタンスの観測値を Z_R 、理論値を Z_I とし、各 Te 値におけるその差 $Z_R - Z_I$ の RMS は、次の式のように表される。

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{400} (Z_R - Z_I)^2}{N}}$$

…(26)

N は最高次数を表しており、この場合 $N = 400$ を代入する。Fig.29 から、 $Te = 14$ km]の場合に RMS が最小になることがわかる。従って月のアドミッタンスの観測値をもっともよく説明する Te は約 14 km であると結論づけられる。

RMS から得られた $Te = 14$ [km] を式(17)に代入し、次数ごと式(14),(24)に基づいて理論に基づいた計算値と実際の重力と地形から計算した観測値を Fig. 30 にプロットした。

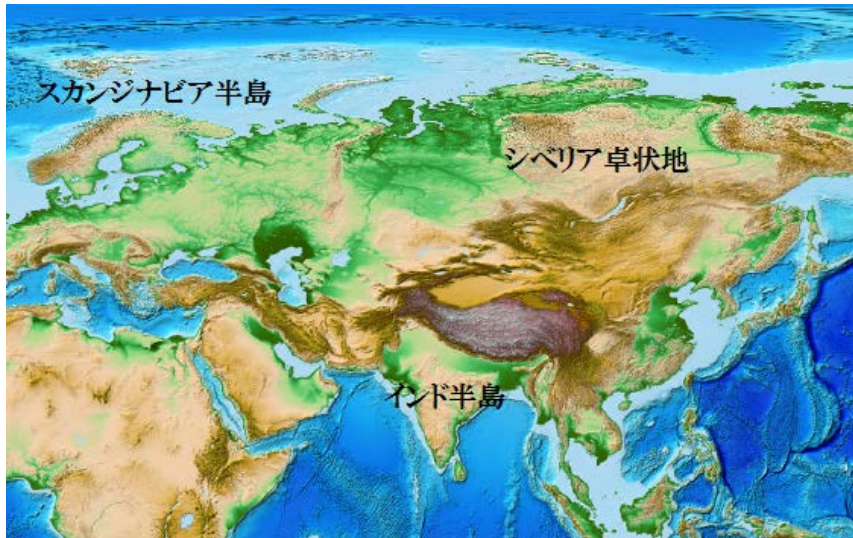


[Fig 30] 重力と地形から求めたアドミッタンスの観測値 (折れ線) とリソスフェア厚を 14 km とした時のアドミッタンスの計算値 (なめらかな曲線)。

このグラフから、月のアドミッタンスは約 110 [mgal/km] で頭打ちになり、頭打ちになり始める次数は約 50 次であることが分かる。これより、約 50 次以上の次数 (波長) の地形においては、アイソスタシー補償がないと考えられる。

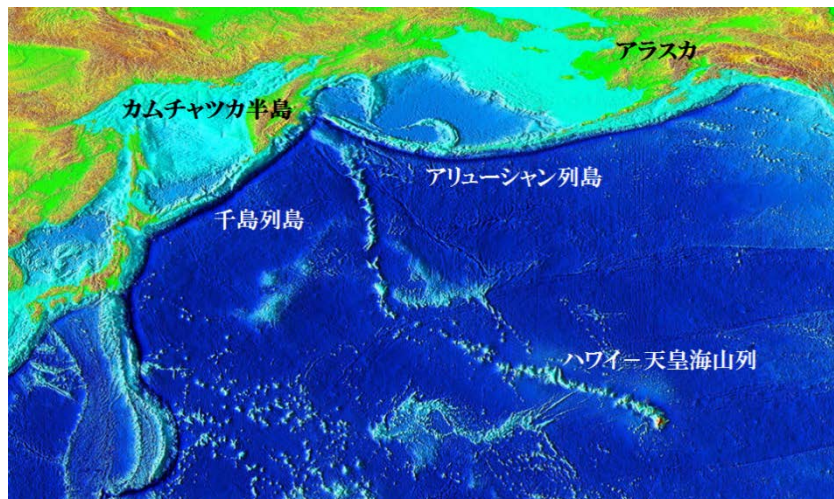
3-5. 地球との比較

過去の文献に見られる地球の一部地域のアドミッタンスやリソスフェア厚さ T_e の様子を、月と比較してみる。ここでは、地球上に長い間居座っている安定陸塊のシベリア卓状地と、海洋プレート上にあり、かつ火山活動が盛んなハワイ-天皇海山列の、アドミッタンスとリソスフェア厚さを例に挙げる (McKenzie and Fairhead, 1997)。



[Fig 31] シベリア卓状地の位置

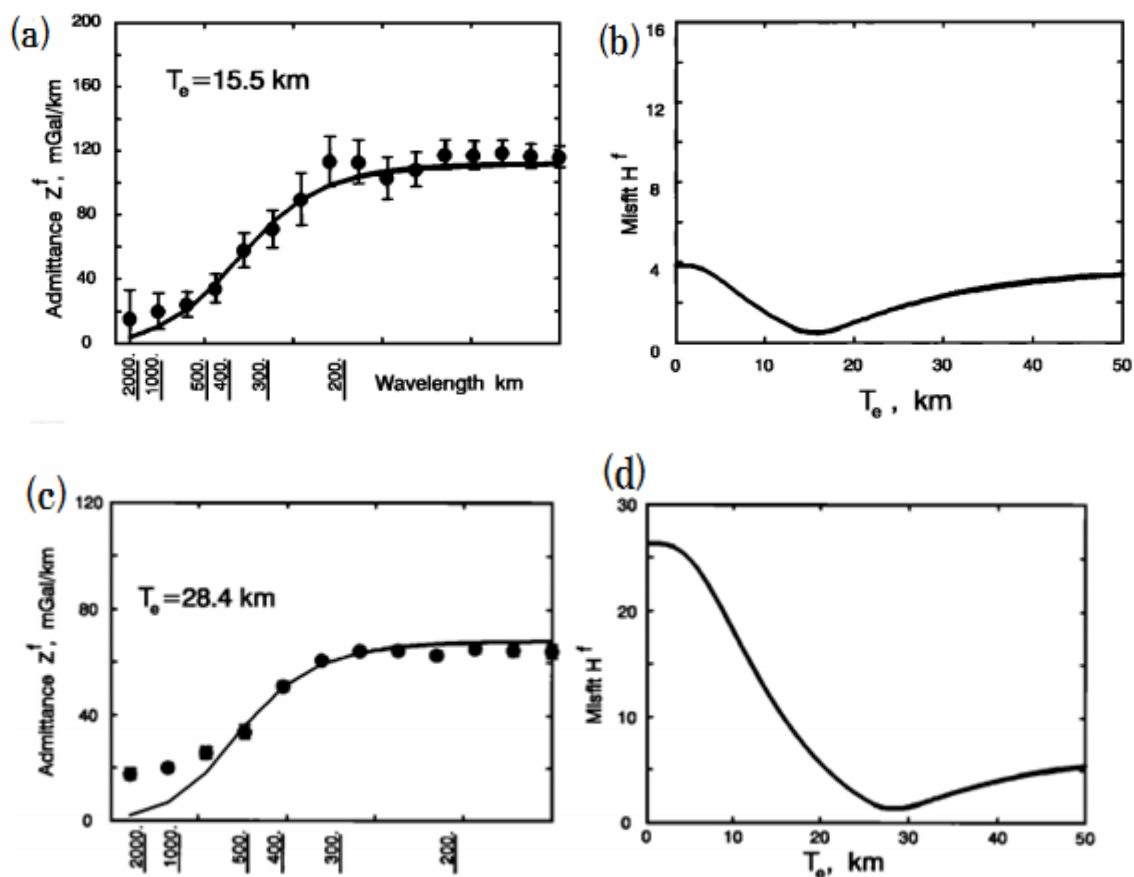
<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/image/2minrelief.html> より引用



[Fig 32] ハワイ-天皇海山列の位置

<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/image/2minrelief.html> より引用

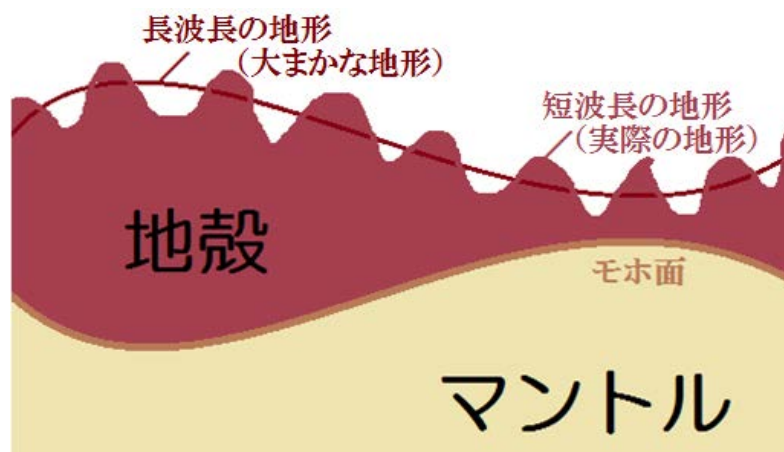
Fig33 中の(a),(b)は、シベリア卓状地におけるアドミッタンス曲線と各次数におけるアドミッタンスの観測値と理論値の差の RMS (図中では Misfit H^f と表記されている)、(c),(d) はハワイ-天皇海山列におけるアドミッタンス曲線と RMS の値をグラフにしたものである。地殻の平均厚さを $t = 16 \text{ km}$ と仮定すると、シベリア卓状地でのリソスフェア厚さは 15.5 km 、ハワイ-天皇海山列のリソスフェア厚さは 28.4 km であると計算された。



[Fig 33] シベリア楯状地（上）とハワイ天皇海山列（下）において、重力と地形の観測値から得られたアドミッタンス（黒丸）と理論曲線（黒い曲線）。理論曲線は右の図のように観測と理論が最も良く合うリソスフェア厚 T_e を用いて計算されたもの(McKenzie and Fairhead, 1997)

シベリア卓状地は古い安定陸塊であり、地形形成後長期間かけた流動によってアイソスタシー補償が高度に達成されているため、重力異常は大きく観測されず、 T_e も比較的小さな値となっている。一方、ハワイ-天皇海山列の海底火山群は、比較的若い地形であり、アイソスタシー補償も不完全である。そのため、リソスフェア厚さも比較的大きく計算されると考えられる。本研究で得られた月全球の T_e が 14 km という結果は、地球上でもやや小さな値であるといえよう。

第4章：まとめと今後の課題



[Fig 34] 地形とモホ面の関係を表したイメージ図。波長の長い地形と短い地形ではアイソスタシーの成立の度合いが異なる。

相関やアドミッタンスを観測すると、月表面の重力異常は、大まかな地形には依らず、短波長の細かい地形によって担われていることが分かる。アイソスタシーが成り立つ長波長の地形と成り立たない短波長の地形の境目を探ることによって、リソスフェア厚や熱流量を議論することができる。それは長波長の地形によってモホ面に凹凸が生じ、重力異常が解消されるためである [Fig 34]。

地球では安定陸塊地域で約 200 km 以上、冷たい海洋プレート上のホットスポット地域で約 300 km の波長の地形によってアイソスタシーが成り立つが、月では約 220 km であることが分かった。一般に天体の大小は、内部熱源の量に対する表面積の比の大小を意味するため、大きな天体ほど熱流量が大きくリソスフェアも薄い。リソスフェアが薄いと短い波長の地形でもアイソスタシーが成り立つようになる。従って、地球よりも小さな月の T_e は、地球の数倍厚いことが予測される。しかし、実際に得られた T_e の値は地球と同程度であることが分かった。これは月の地形が形成された年代が、安定陸塊が形成された先カンブリア時代の中でも 40 億年前近いはるか昔であることを示唆しているのかもしれない。当時の月はまだ冷え切っておらず、高い熱流量と現在の地球と変わらない薄いリソスフェアが支配していたのだと思われる。

惑星物理学にとって大切なことは、様々な惑星（衛星も含む）と比較し、その類似点や相違点を明らかにしてその原因を議論することである。ここで論じた月や地球の重力と地形のアドミッタンスを、他の地球型惑星のそれと比較することで、それぞれの天体の熱進化の過程を議論することができる。また、月のように太陽系の初期に冷えてしまった天体

では、遠い過去のアイソスタシーの状態が化石として保存されている。今後は、天体の大きさだけでなく、地形の主な形成年代も考慮した議論が必要であろう。

謝辞

本研究を行うにあたり、宇宙測地学研究室、固体系ゼミの一員としてたくさんの方を学ばせて頂きました。指導教官の日置幸介教授には本研究で大切な地球物理学の原理や有用な文献、さらにプログラムの立て方など、本研究の「肝」となるデータやその扱い方を丁寧に指導していただきました。同研究室の古屋正人教授、固体系ゼミの小山順二特任教授、蓬田清教授にはこれから研究していくうえで忘れてはいけない「科学に対する姿勢」、本研究で使用する数式が意味する内容の重要性など、たくさんの方の助言をいただきました。

研究室の先輩方にも感謝の意を表します。特に博士課程 3 年の安田貴俊さんにはコンピュータのセットアップやプログラミング、修士課程 2 年の梅村宗太郎さんには高等学校レベルの地学の内容を教わりました。

お世話になりました。これからもご指導ご鞭撻のほどよろしくお願ひします。

参考文献

- Watts, A.B. (2001) : Isostasy and lithospheric flexure, Cambridge University Press pp.87-95、pp.177-189.
- 青山千晶 (2000) : 「局地的なアドミッタンスを用いた月内部構造の推定」九州大学理学研究科地球惑星科学専攻、修士論文
- McKenzie, D. et al. (1997) : Estimates of the effective elastic thickness of the continental lithosphere from Bouguer and free air gravity anomalies, *J. Geophys. Res.*, **102**, 27,523-27,552
- 日置幸介 : 地球内部物理学 講義ノート
(http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~heki/pdf/Phys_inter.pdf)
- Howard, K. A.(1970) : Mascons, mare rock and isostasy, *Nature* **226**, 924 – 925,
doi:10.1038/226924b0
- 松尾功二 (2008) : 「Mars Global Surveyor による火星の測地学的研究」北海道大学理学部地球科学科卒業論文
- 橋本実奈 (2012) : 「月惑星の重力場におけるカウラ則とカウラ定数のスケーリング則」、北

海道大学理学部地球科学科卒業論文

橋本実奈、日置幸介 (2013) : 月惑星の重力場におけるカウラの法則とそのスケーリング則、
測地学会誌、**59**, 163-166.

Zuber, M. et al. (2013) : Gravity field of the Moon from the Gravity Recovery and Interior
Laboratory (GRAIL) mission, Science **339**, 668-671, DOI:10.1126/science.1231507

GRAIL 衛星のイメージ

(http://www.nasa.gov/images/content/574603main_grail20110722.jpg)

SELENE (かぐや) による月表面の重力異常測定図

(<http://www.sciencemag.org/content/323/5916/900/F2.expansion.html>)

月の重力モデル

(http://pds-geosciences.wustl.edu/grail/grail-1-lgrs-5-rdr-v1/grail_1001/shadr/)

火星の重力場モデル、火星の地形モデル

(<http://www.ipgp.fr/~wieczor/WieczorekPUB.html>)

シベリア卓状地、ハワイ-天皇海山列の位置

(<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/image/2minrelief.html>)