

非プレートテクトニクス起源の
地球の大規模変形の検出

The Earth's global deformation of
non-plate-tectonic origin

北海道大学 理学部 地球科学科
宇宙測地学研究室

小川 涼子
Ogawa Ryoko

2005 年 1 月 28 日

要旨

北米のローレンタイトと北歐のフェノスカンジアの二大氷床の融解に伴い、アイソスタシー回復のための変形が起こる (Post-glacial Rebound; PGR). PGR による変形は氷床およびその周囲にとどまらず、全球規模の変形をもたらす。また PGR に伴って氷床に覆われていた地域が隆起することにより、質量の再分配に伴う地球の形状軸の移動が生じる。過去百年の地球回転の観測により、地球の平均極が現在では北米方向に移動しつつあることがわかっている。このような真の極移動 (True Polar Wander; TPW) により、遠心力ポテンシャルの変化に伴う地球の変形が生じる。

PGR の最も長波長の成分と TPW による地球の変形は、鉛直速度が球関数の P_{20} , P_{21} 成分に、また水平速度がそれらの関数の勾配に対応する。地球の内部構造を考慮したモデルによると、どちらの寄与も相対速度で最大 1mm/yr に達する速度が予測されている。これは GPS による局速度の平均的な推定誤差よりも小さいため現時点でも検出できる可能性がある。

地質学的時間スケールで地球深部の粘性を議論するためには、このような長波長の変形の解析が必須である。そのため本研究では、プレート運動 (プレートの剛体回転) に加えて地球表面が P_{20} , P_{21} の形の速度で変形していると仮定し、全球に分布した GPS 局の速度をデータとして、上下方向・水平方向に分け、プレート運動と併せて検出を試みた。その結果、 P_{20} 成分は期待される符号で、比較的安定した推定結果が得られた。それらの値からは、PGR のような長い時間スケールの現象では、水平方向の地球の変形のしやすさを示す志田数 l_2 が、上下方向の度合いを示すラブ数 h_2 に対して相対的に大きくなることが示された。TPW に相当する P_{21} 成分の速度に関しては安定した推定結果が得られず、モデル化が不十分であることを示唆した。本研究では、さらに zonal な高次項を考慮してモデル化を試みたが、 P_{21} 成分に関してはやはり不安定な結果となった。しかし、モデル化したパラメータ同士の相関は小さく、パラメータ間の分離はうまく出来ている。将来重力ミッションの結果等と併せれば、より確実に地球の大規模な変形の信号を検出できるかもしれない。

目次

要旨	i
第1章 はじめに	1
1.1 地球の内部構造	1
1.1.1 地球の内部構造	1
1.1.2 Post-Glaicial Rebound	3
1.2 本研究の目的	4
1.2.1 荷重による鉛直・水平方向の変位	4
1.2.2 PGR と TPW による地球の大規模な変形	5
第2章 解析手法	11
2.1 GPS データ	11
2.1.1 プレート運動モデル	11
2.1.2 データ条件	12
2.2 解析手法	14
第3章 解析結果およびプレート運動モデルの評価	16
3.1 解析結果	16
3.2 プレート運動モデルの評価	19
第4章 PGR と TPW 成分の検出	22
第5章 高次項を考慮した計算	24
謝辞	26
参考文献	27
付録A PGR の式の導出	29
付録B 最小二乗法	32

第1章

はじめに

1.1 地球の内部構造

1.1.1 地球の内部構造

地球は、層構造をしている。層構造の区分の仕方は、物質や組成の違いに基づいているもの（化学区分）と、変形のしやすさ、すなわち粘性率の大小の着目した区分（力学区分）がある。

化学区分では、地球内部は、地殻-マントル-核という層構造をなしている。地球の内部構造は、主に20世紀に入ってから、地震波の解析によって明らかにされた。地震波には速度の異なるP波（縦波）とS波（横波）がある。P波、S波とも、速度は媒質の密度と弾性定数の関数で、地球内部でこれらが変わることにより、地震波の屈折や反射が起こる。また、S波は流体中を伝播しない。一般に、深さ方向に速度が変化する層構造を仮定し、震源からの距離に対して地震波の伝播に要した時間（走時）の関係を用いて、層の厚さと層内の地震波速度を推定する。20世紀初頭、モホロビッチは地表から約50kmの深さに速度の明瞭な不連続を発見した。これが地殻とマントルの境界（モホロビッチ不連続面：モホ面）である。後に、震源からの角距離が 103° – 143° の領域に地震波が到達していないこと、さらに、S波は 143° より遠方にも到達していないことが発見された。これより、地表から2900kmより深部に流体の核が存在することが推定された。この核-マントル境界（Core-Mantle Boundary：CMB）で反射した地震波が明瞭に観測されることから、境界をはさんで地震波速度の変化は急激である。その後の詳細な解析により、核は、流体からなる外核と、半径1220kmの固体からなる内核とに分かれていることも明らかになった。

力学区分では、リソスフェア・アセノスフェア・メソスフェア・外核・内核に区分される。地球表層部は、数10km–100kmの厚さを持つリソスフェア（プレート）と、その下の低粘性で流動性の高いアセノスフェアとに区分される。このマントル

物質の粘性の違いで区分されている。

弾性体は、応力 σ と歪 ϵ が比例する。弾性定数を k とすると、 $\epsilon = \sigma/k$ 粘性流体では、歪速度が応力に比例する。すなわち、 $\dot{\epsilon} = \sigma/\eta$ ただし、 η は粘性係数を示す。両者が直列で結ばれた物体（マックスウェル物体）が、地球の粘弾性をよく説明することが知られている。両者を併せた歪速度は、

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.1)$$

時間で積分すると、

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\eta}t + \frac{\sigma}{k} \quad (1.2)$$

弾性項と粘性項が同じ大きさになる時間（＝マックスウェル時間） $\tau_m = \eta/k$ を境に、長い時間スケールでは、第一項の粘性項が卓越し、短い時間スケールでは第二項の弾性項が卓越する。アセノスフェアで、 $k = 100GP_a$ 、 $\eta = 10^{20}P_a \cdot s$ とすると、 τ_m は、約30年となり、地質学的時間スケールでは、アセノスフェアは流体と考えることができる。

このような区分は、地球内部の温度が深くなるほど高くなるために生じる。この力学的区分があることを理解するには地球内部の温度分布を知る必要がある。地球内部の温度分布は、内部で熱がどのように運ばれるかに、密接な関係がある。

地球内部の熱源の主なものとして、放射性元素による発熱エネルギーがあげられる。地球を構成する岩石・鉱物の中に含まれている、いくつかの放射性元素が、放射壊変する際に熱を発生する。このうち特に重要な元素に、U,Th,Kがある。また、地球形成時の重力エネルギーも熱源のひとつである。隕石のような始源物体が集積して地球が形成されたとすると、これらの始源物体が持っていた重力ポテンシャルエネルギーは、地球と衝突したとき熱エネルギーに変換される。この熱エネルギーの一部は、地球の表面から輻射エネルギーとして宇宙へ失われるが、残りの部分は地球内部に捕らえられ、地球を温めるのに使われたと考えられる。また、地球の核の形成時にも重力エネルギーが熱エネルギーに転換されたと考えられる。この二つの重力エネルギーの解放も熱源として重要である。

これらの熱源を内部に備えている地球は、熱伝導と熱対流という形で、熱の輸送を行っている。対流の起こりやすさを示すレーリー数 R_a は、 g を重力加速度、 ρ_0 を上面での物質の密度、 α を熱膨張率、 ΔT を温度差、 d を層の厚さ、 κ を熱拡散率、 μ を粘性係数とすると、

$$R_a = \frac{g\rho_0\alpha\Delta Td^3}{\kappa\mu} \quad (1.3)$$

となる。これが1000程度以上になると、熱対流が生じる。熱境界層であるリソスフェア下では、熱対流が起こり、そこでの温度勾配は $0.3K/km$ 程度をとり、断熱温度勾配となる。

リソスフェアと地表間では熱伝導で、熱を輸送する。熱伝導の基本は、フーリエの式で示される。表面の熱流量 q は、温度勾配 (y は、温度変化の進む方向) と熱伝導率 k で示される。

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.4)$$

剛性を失う温度に達する深さは温度勾配、つまり熱流量に比例する。天体表面の熱流量を表面全体で積分した値は、天体内部で発生した熱量に等しい。地球の半径 r 、発熱量 H 、密度 ρ とすると、

$$4\pi r^2 q = \frac{4}{3}\pi r^3 H \rho \quad (1.5)$$

つまり、

$$q = \frac{1}{3}rH\rho \quad (1.6)$$

よって、熱流量は天体の半径に比例するため、天体の半径が大きいと温度勾配が大きくなる。つまり、リソスフェアの厚さは半径に反比例する。リソスフェアの厚さは、その下で熱対流が行われるか否かの指標ともなる。つまりリソスフェアが厚いと、(1.3)式で、内部で対流できる厚さを持つことが出来なくなってしまう。地球は、対流が成立する構造を持っているといえる。またリソスフェアが適度な厚さをもっているため、あまり変形しないで水平方向にうごくいわゆるプレート運動が生じ、特徴的なテクトニクスが見られる。プレート運動の本質は、内部の熱を効率よく逃がすために、固体地球が熱対流を起こして生じるものである。内部がどのような粘性構造を持っているか、そのためどのようなエネルギーの輸送を伴って、地球のグローバルなテクトニクスが作用しているのかを見るのが、内部を議論するうえで必要になる。

1.1.2 Post-Glaicial Rebound

内部が粘性の大きさは、地球の変形の大きさや速さに影響する。前で述べているように、地質学的時間スケールにおいてアセノスフェアが流動性を示すために、十分な時間が経過すれば密度境界(モホ面等)が上下に移動することによって重力と浮力をつりあわせる。このつりあいをアイソスタシーという。アイソスタシーは、空間波長約 $1000km$ 程度よりも長波長の領域では、よく成り立っていることが知られている。地球全体もアイソスタシーの状態に向けて変形しつつあると考えられるが、リソスフェアの剛性やマンツルの粘性のために実際の運動は複雑である。地球の粘

性流体的な振る舞いが典型的に現れる例として、Post-Glacial Rebound（後氷期回復、以下PGRとする）がある。北半球にあるフェノスカンジヤ（北欧）およびローレンタイド（北米）の二大氷床では、氷床直下では地殻を押し下げその分、周縁部は盛り上がるように、地球は変形していた。この氷床が融解したとき、その荷重から解放され新しいアイソスタシーの状態を回復しようとして、地形は元の位置に戻ろうとゆっくりとした変形を開始した。そして6000年前に完全に氷河の融解が終了しているにもかかわらず、現在でもゆっくりと変形をしている。

氷床の融解は、この変形に比べて時間スケールが短い。内部が完全に弾性体であれば、同じ時間スケールで変形を起こすが、内部が粘性を持っているために、変形がゆっくりと起こる。よって、速度場は内部の粘性構造に依存しており、速度場から内部の粘性構造を知ることができる。

表面の初期の変位 w とすると、

$$w = w_m \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \quad (1.7)$$

変位は流体が流れる時間に伴って、指数関数的に減少する。この時間を緩和時間 τ_r といい、 μ を粘性係数、 ρ を密度、 g を重力加速度、 λ を波長とすると、

$$\tau_r = \frac{4\pi\mu}{\rho g \lambda} \quad (1.8)$$

と示せる。式の導出は、Appendix A で示す。緩和時間からマンツルの粘性率を求めることは一意的にはできないが、特定のモデルを仮定すると粘性率の深さ分布を推定することができる。

現在では、フェノスカンジヤ付近のGPS観測データの解析により、粘性構造のさらなる拘束が可能になった (Milne et al., 2004)。これについては、1-2 で詳しく説明する。

1.2 本研究の目的

1.2.1 荷重による鉛直・水平方向の変位

地表面に対して上下方向の変位を u_r 、水平南北方向の変位を u_θ 、水平東西方向の変位を u_ϕ とし、 g を重力加速度、 h をラブ数、 l を志田数、 ΔU を擾乱ポテンシャルとすると、それぞれの変位は、以下のようなになる。

$$u_r = \frac{h}{g} U(r, \theta, \phi) \quad (1.9)$$

$$u_{\theta} = \frac{l}{g} \frac{\partial \Delta U}{\partial \theta} \quad (1.10)$$

$$u_{\phi} = \frac{l}{g \cos \theta} \frac{\partial \Delta U}{\partial \phi} \quad (1.11)$$

ラブ数/志田数とは無次元のパラメータであり，地球をさまざまな弾性定数で特徴付けられた層構造をもつ弾性体の球と仮定したときの外力に対する地球の変形の度合いを示した定数である．よってこれを求めることで地球のやわらかさを推定することが出来る．地球の非弾性を表すために，ラブ/志田数を複素数にとることも多い．上の三式で示されるように，水平方向は上下方向の空間微分に比例する形になる．

1.2.2 PGR と TPW による地球の大規模な変形

自転に伴う遠心力ポテンシャルのために地球の形が扁平な回転楕円体になっていることは，かつてニュートンが予測しフランスの国家プロジェクトとしての測量事業によって確認されたことが知られている．自転による赤道の膨らみを示すパラメータとして，地球重力場ポテンシャルを球関数展開したとき二次の帯球関数 P_{20} （緯度を θ とすると， $(3 \sin^2 \theta - 1)/2$ で表される）の係数となる C_{20} に -1 をかけた (n は次数) J_2 ($\equiv -C_{20}$) がよく用いられる（なお正規化した球関数を用いるときは5の平方根も掛ける必要がある）． J_2 の永年の減少は，1980年代に測地衛星の衛星レーザ測距によって軌道要素の変化（昇交点経度が移動する速度の変化分）から見出された (Yonder et al., 1983)．これは PGR による高緯度地方の隆起が，赤道の膨らみ具合を相対的に減らしていることを意味する．最近では， J_2 以外の高次項 ($J_3 \sim J_5$) の時間変化 (Cheng et al., 1997) や，1990年代後半に J_2 の減少が突然鈍ったこと (Cox and Chao, 2002) なども知られている．

PGR による地面の動きを推定するためには，氷床荷重の減少と氷床が解けて生じた水の増加と，海底の上下運動に伴う海水荷重の再分配を考慮しなければならない．氷床後退の歴史と適当な地球の粘弾性構造を仮定して，地球表面の質量再分配に伴う，上下および水平方向の速度場を，Mitorovica et al. (2001) が計算したものを図 1-1 で示す．

上下方向に関しては，まず北極・南極域に関して，氷床が融解することで，最も大きな隆起がみられる．その周りは押し下げられ，沈降を示している．海洋では海水荷重が増加する分，海底が押し下げられ，小さな沈降の値を示している．水平方向に関しては，まず二大氷床である，北欧のフェノスカンジヤと北米のローレンタイド付近では，PGR の局地的な効果として外向きに大きく動いていることが分かる．しかし，氷床からある程度離れると，基本的には北半球と南半球でそれぞれ北向きと南向きの最大 0.5 mm/yr ほどの速度を示している．高緯度での速度の小さく

なり具合が J_2 のみの効果にしては小さいので、 J_2 以外の高次項も考慮しなければならないと考えられるが、基本的には、 J_2 の減少に伴う成分が主であることが分かる。

Mitrovica et al.(2001) は、これらの表面荷重の影響に加えて、質量の再分配に伴う地球の形状軸の移動 (True Polar Wander, TPW) により、遠心力ポテンシャルの変化に伴う地球の変形が別途生じることを指摘した (図 1-2)。極とずれた所に氷床が発達すると、形状軸がずれる。フェノスカンジアとローレンタイドの二大氷床は、ローレンタイドの方が大きいため、両地域の PGR による隆起によって、北米方向に形状軸が引っ張られる。遠心力による赤道部分の盛り上がりも、北米方向に形状軸が傾くことで再調整され、地球全体がふくらみ領域とへこむ領域に分かれる。

この効果による上下変位は、経度 ϕ' の基準を極運動の方向にとると、 $P_{21}(\sin \theta) \cos \phi'$ に比例する形となる。1-1 で示したように、水平方向の速度は上下方向速度の空間微分に比例するので、 $\nabla(P_{21}(\sin \theta) \cos \phi')$ の形の分布をもつ変形が生じる。

Milne et al.(2004) では、北欧広域の GPS 観測プロジェクトによって得られたデータを、適当なリソスフェア・上部マントル・下部マントルの三層のモデルを与えて、リソスフェアの厚さと上部および下部マントル内部の粘性を推定している。図 1-3 から、下部マントルは上部マントルに比べて拘束が弱いことがわかる。これは、フェノスカンジアの氷床が比較的小さいため、それに関する PGR に下部マントルの粘性があまり反映していないことを示している。このデータから、マントルの粘性は、上部マントルは $10^{21} P_a \cdot s$ 、下部マントルは $10^{22} P_a \cdot s$ の値が得られている。一方 Okuno and Nakada(2001) は、北米ローレンタイドの氷床に焦点を当てているが、こちらの氷床は波長がより長いので、下部マントルの構造を比較的大きく反映している。全球的な変形を見ることで、より深い部分の粘性構造をさらに拘束できるのではないかと考えられる。

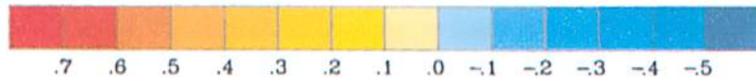
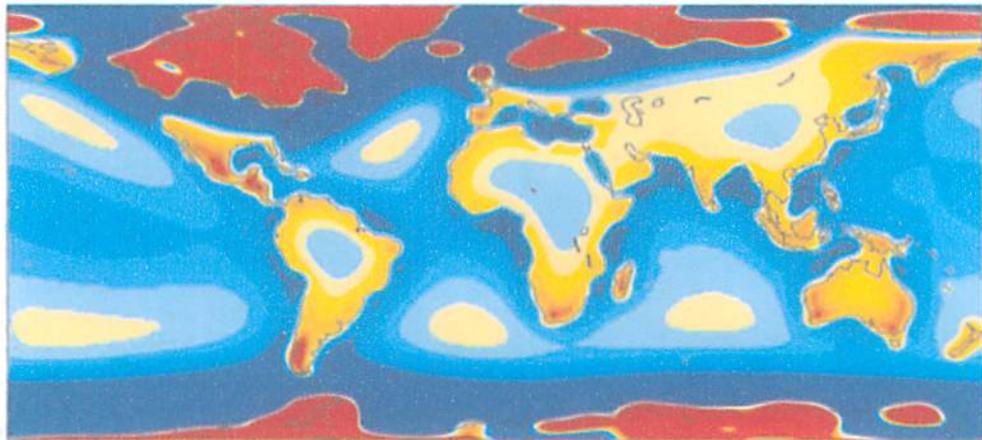
IERS のデータ (<http://www.iers.org>) から、ここ 10 年の極移動を図 1-4 で示した。この図の原点は、約 100 年前に国際緯度観測事業 (ILS) 開始ときに定義された、年周およびチャンドラー極運動の中心 (平均極) である。図から、現在の平均極はこの原点から、 y 方向に 0.3 秒角ほど移動しており、地球の質量の再分配により形状軸が移動したことを示している。これは、ローレンタイド氷床があった北米方向 (西経 74 度) であり、Mitrovica et al.(2001) で指摘した球関数の P_{21} の形の速度場がこの方向を経度の基準として存在することを示唆している。

過去 20 年の平均的な \dot{J}_2 は -1.92×10^{-11} と考えられている (Cheng et al., 2004)。一般に地形を球関数展開したときの係数 a_{nm} 、 b_{nm} と重力ポテンシャルの展開係数

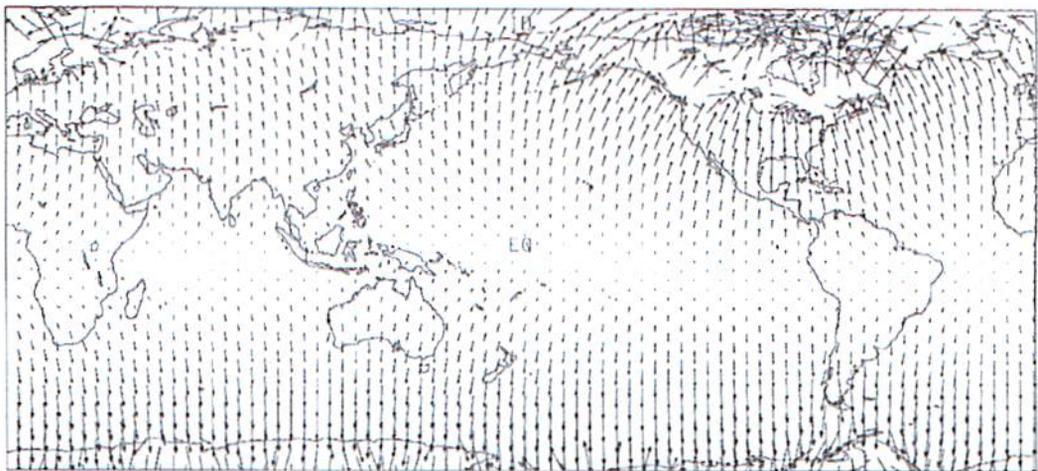
(ストークス定数) C_{nm} , D_{nm} の間には, 天体の内部密度が一様なら $C_{nm}, D_{nm} = 3/(2n+1) \times a_{nm}, b_{nm}$ の関係があり, 天体が密度成層していれば係数はより大きくなる (Sagitov et al., 1986). 従って観測された C_{20} の永年変化が地球の形の変化を反映したものと考えれば, 少なくともその $5/3$ 倍の $P_{20}(\sin \theta)$ の形の上下変位があるはずである. (1-9), (1-10), (1-11) 式から, それぞれの項は完全に分離できるとして, 軌道解析で得られた値を計算してみると, J_2 の減少による上下の速度は, 最大で約 1mm/yr にもなり, 永年的な変形に関する志田数がかなり大きいことを考えると水平成分でも零点数 mm/yr の変位速度をもたらす可能性がある. これは Mitrovica et al. (2001) の計算結果とも調和的である. よって, 速度データが高精度であれば P_{20} 成分の検出も可能と考えられる.

これらのことから本研究では, 公開されている全球の GPS 局の速度データを用いて, これらのパラメータを推定し, プレートテクトニクス以外の地球の変形に起因する信号の検出を試み, その値を評価する. また, 得られた結果を用いて地球の内部構造についても議論していく.

次章では, 用いたデータと解析手法について説明する.

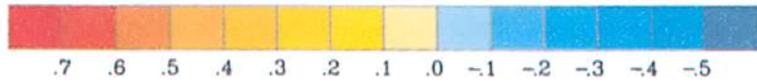
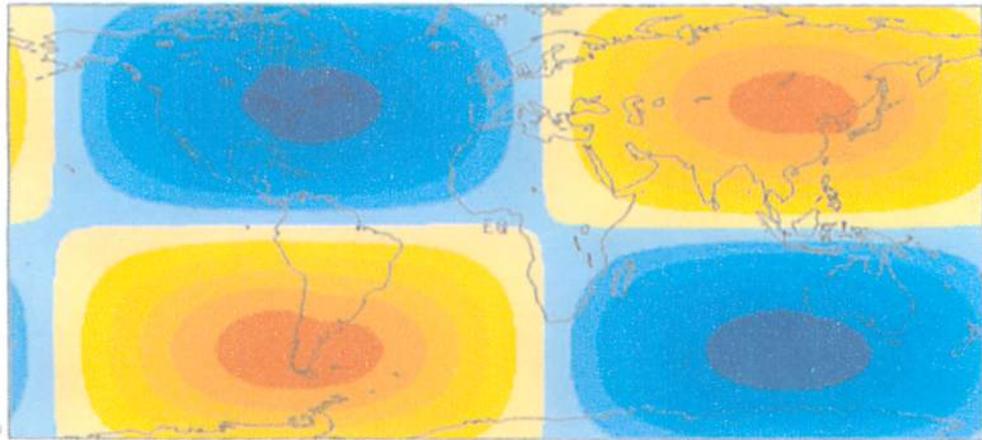


(a) PGR による上下方向の速度場

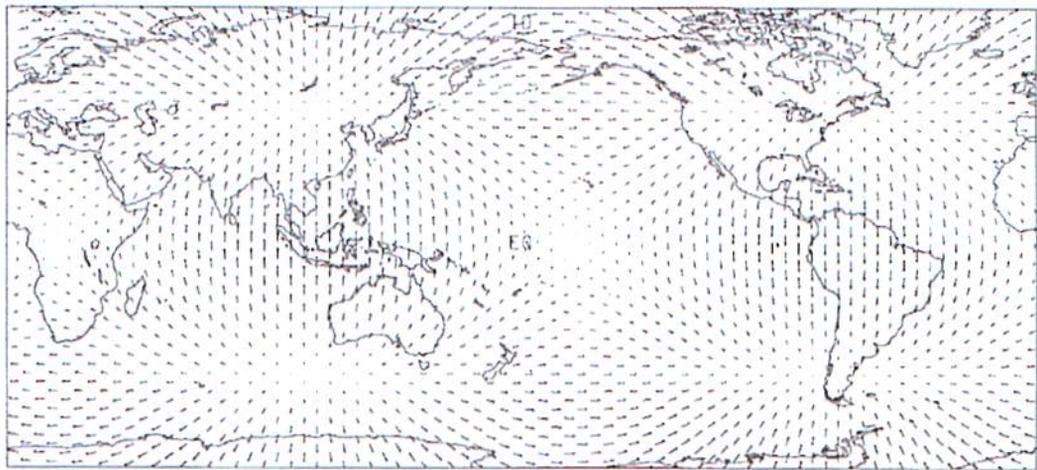


(b) PGR による水平方向の速度場

図 1-1: PGR による速度場 (Mitrovica et al.,2001)



(a) TPW による上下方向の速度場



(b) TPW による水平方向の速度場

図 1-2: TPW による速度場 (Mitrovica et al.,2001)

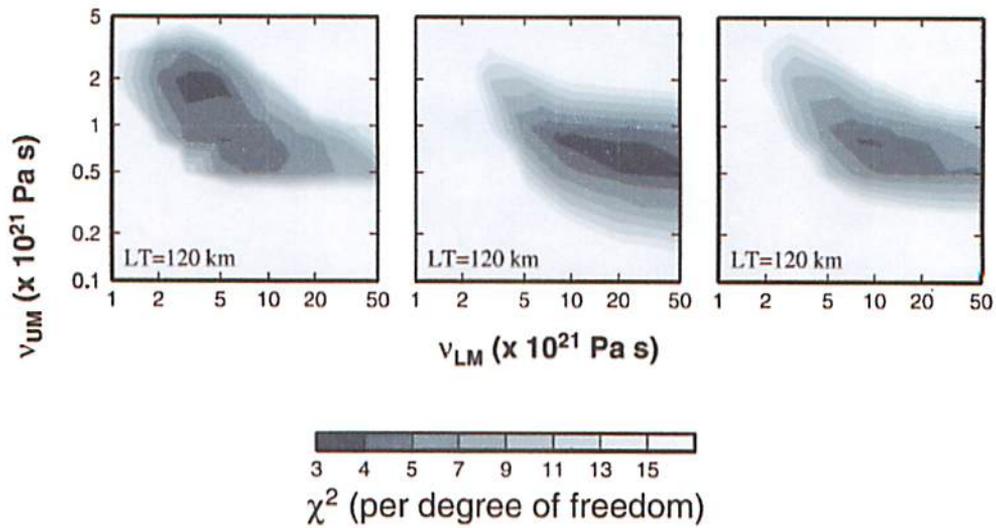


図 1-3: グリッドサーチによる内部の粘性構造 (Milne et al., 2004) 左から上下方向, 水平方向, および両者を用いて得られたもの. χ^2 が小さいほどデータによくフィットしている.

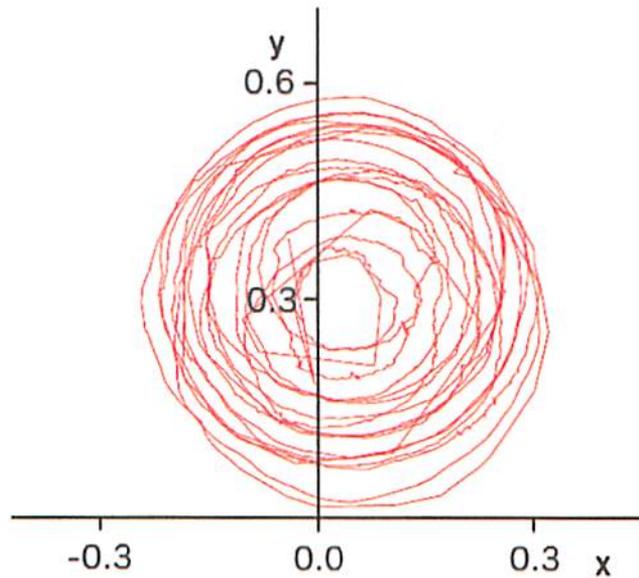


図 1-4: IERS データによる過去 10 年間の極運動 (秒角)

第2章

解析手法

本章では、本研究に用いたGPSデータと、解析手法について述べる。

2.1 GPS データ

2.1.1 プレート運動モデル

地表の水平運動を支配するプレート運動およびそれに起因するプレート境界の変形は、年間数 cm に及び、前章で述べた、非プレートテクトニクス起源の速度場よりも二桁大きい。従って、PGR や TPW によるグローバルな速度場を検出するためには、GPS 等で観測された局速度の、プレート運動からのわずかなずれを議論しなければならない。

逆に従来のプレート運動のモデル化では、PGR/TPW を考慮していないことによって太平洋プレートやユーラシアプレートなどの大きなプレートの運動パラメータを推定するにあたって、収束を幾分悪化させている可能性も考えられる。プレートは剛体として動くと仮定すると、個々のプレートは回転運動の中心（オイラー極）の座標（緯度と経度）とそのまわりの回転角速度の三種類のパラメータでモデル化される。オイラー極の座標を (θ_e, ϕ_e) とし、回転速度を ω とすると、プレートの角速度ベクトル（オイラーベクトル） Ω が定義できて、地球の中心においた直交座標系で、

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} \omega \cos \theta_e \cos \phi_e \\ \omega \cos \theta_e \sin \phi_e \\ \omega \sin \theta_e \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

とあらわすことができる。任意の点 (θ_s, ϕ_s) の速度を求めるときは、地球中心からその点に向かうベクトル \mathbf{r} 、 Ω のベクトル積から、

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

として求められる。ここで r は、地球の半径を R とすると、

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} R \cos \theta_s \cos \phi_s \\ R \cos \theta_s \sin \phi_s \\ R \sin \theta_s \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

である。プレート運動を決定するには、(1) 海嶺 (プレートの発散境界) における磁気異常から得られた拡大速度、(2) 海溝 (プレート収束境界) におけるプレート間地震のすべりの向き、(3) トランスフォーム断層 (プレートのすれ違い境界) の走向の三種類のデータを組み合わせて、過去数百万年という地質学的な時間窓における平均として推定されてきた。RM1 (Minster et al., 1974), RM2 (Minster and Jordan, 1974), NUVEL1 (Demets et al., 1990), NUVEL1a (Demets et al., 1994) 等のモデルの系譜がこの系統に属する。パラメータの推定に用いられる (1)~(3) のデータはいずれもプレートの相対的な動きに関するものであるため、これらから得られるモデルもプレートの相対運動に関するものとなる。それらに何らかの仮定を付加することによりプレートの絶対運動モデルに変換できるが、測地学では一般にプレート全体の地球中心まわりの回転の合計をゼロにする (no-net-rotation) 拘束条件を導入した nmr-NUVEL1 (Argus and Gordon, 1991) (地磁気逆転タイムスケールの改訂をしたものは nmr-NUVEL1a と呼ばれる) が地上基準座標系の絶対速度を与える標準モデルとされている。最近の研究では、VLBI (超長基線電波干渉法), SLR (衛星レーザ測距), GPS などの宇宙測位技術で測地学的な時間スケールにおけるプレート運動のパラメータ推定が行われるようになり、Sella et al. (2002) による REVEL や、より新しいデータを取り入れた Prawirodirdjo and Bock (2004) によるモデルが知られている。

2.1.2 データ条件

非プレートテクトニクス起源の速度場を検出するためには、

- 高精度の速度データ
- プレート運動による速度成分の高精度の除去

が必要となる。本研究では、JPL の M. Heflin 博士が GIPSY ソフトウェアで単独精密測位法によって求めた GPS 局速度をウェブ上で公開しているもの (<ftp://sideshow.jpl.nasa.gov/pub/mbh>) を速度データとして用いる。データには、直交座標系における観測局の位置 (x, y, z) 、その観測局での速度データ (v_x, v_y, v_z) と観測誤差 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ が掲載されている。また、それを球面座標系に変換した (緯度・経度・高さに変換したも

の) それぞれの値 $((\theta, \phi, r), (v_\theta, v_\phi, v_r), (\sigma_\theta, \sigma_\phi, \sigma_r))$ も掲載されている。推定に用いる局は、境界近傍でのプレート変形やPGRをもたらずローレnciaイド、フェノスカンジア両氷床の近傍を避けなければならないが、本研究では基本的に Prawirodirdjo and Bock(2004) が、安定な局としてプレート運動パラメータの推定に用いたものを選んだ。また17個のプレートのうち、SierraプレートとSinaiプレートは、観測点が少ないため推定対象から除外した。用いたGPSデータの鉛直・水平方向の速度場を図2-1、図2-2に示す。

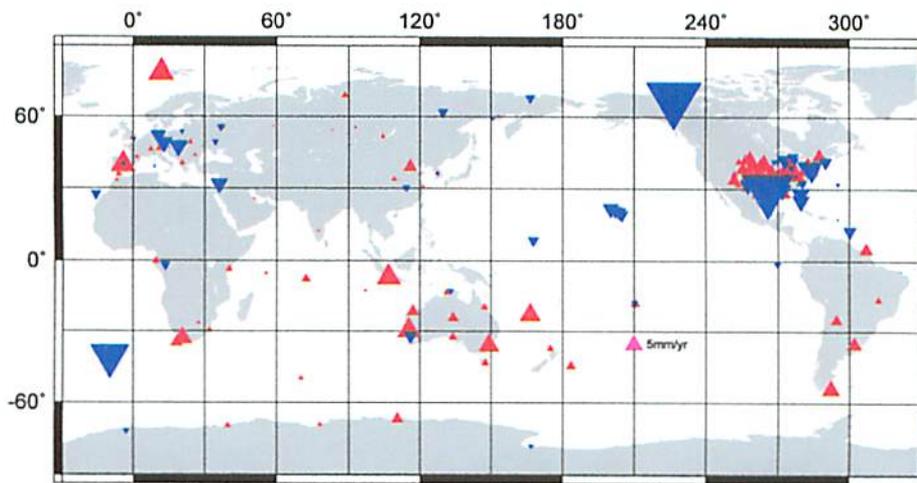


図 2-1: GPS によって測定された世界各局の上下速度 上昇が赤い三角, 下降が青い三角で, 三角の大きさが速度絶対値の大きさを示す。

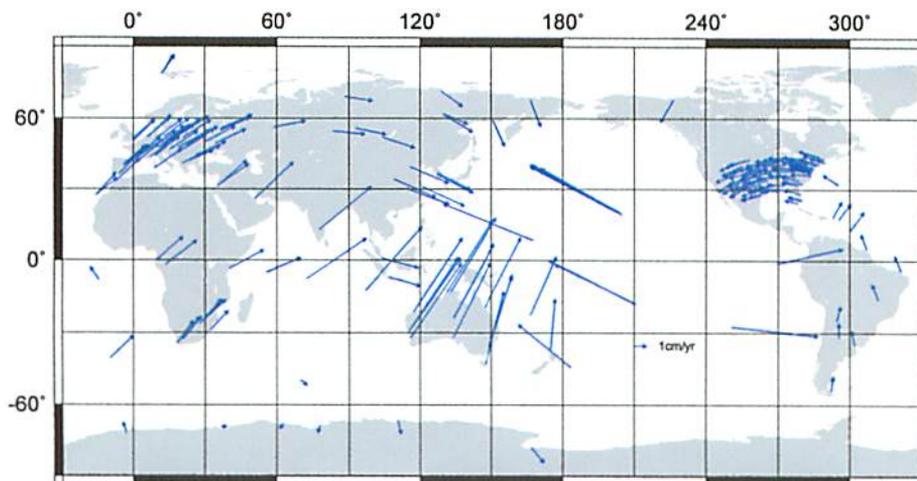


図 2-2: GPS によって測定された世界各局の水平速度

2.2 解析手法

上下速度は直接プレート運動とは無関係なため、PGRとTPWの二つの要因によると仮定して、この二つのパラメータの推定を同時に行った。PGRによる速度場は二次以上の高次項も含むが、ここでは J_2 の時間変化に相当する速度場 $((3\sin^2\theta-1)/2$ に比例する成分)で代表させて推定した。この成分の大きさを特徴づけるパラメータを C_{20} とする。TPWに伴う速度場は、 $-\sin 2\theta \cos \phi'$ に比例する速度成分として推定した。 ϕ' は、現在の極移動の方向(西経74度)から測った経度である。この成分の大きさを与えるパラメータを C_{21} と呼ぶ。以上から上下速度における n 個の点の観測方程式は以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} (3\sin^2\theta_1-1)/2 & -\sin 2\theta_1 \cos \phi'_1 \\ (3\sin^2\theta_2-1)/2 & -\sin 2\theta_2 \cos \phi'_2 \\ \vdots & \vdots \\ (3\sin^2\theta_n-1)/2 & -\sin 2\theta_n \cos \phi'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{20} \\ C_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

水平方向の速度場に関しては、既存のプレート運動モデルは用いずにPGRとTPWによる非プレート運動起源の速度成分とプレート運動パラメータを同時に推定するという方針をとった。プレート運動は、(2-2)式で示されている通り、それぞれのプレートで剛体の回転運動と考える。よって、観測局をそれぞれのプレートに分類した。PGRに関しては、1章で示したように $\partial P_{20}/\partial\theta$ に相当する速度成分、つまり北半球と南半球でそれぞれ北向きと南向きで $3\sin 2\theta/2$ に比例する成分を推定した。またTPWによる速度場は上下速度場の空間微分をとって、南北、東西成分はそれぞれ $-\cos 2\theta \cos \phi'$ 、 $\sin \theta \sin \phi'$ に比例する速度成分として推定した。この場合直交座標系におけるパラメータ推定のほうがプログラミングが容易なため、直交座標系でパラメータを推定した。PGRによる南北方向、東西方向の速度を座標変換したものを、 x_{pgr} 、 y_{pgr} 、TPWによる南北方向、東西方向を座標変換したものを、 x_{tpw} 、 y_{tpw} とし、オイラーベクトルを $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 、水平方向におけるPGR成分とTPW成分の大きさを特徴づけるパラメータをそれぞれ C'_{20} 、 C'_{21} とすると、あるプレート上の m 個の点の速度に関する観測方程式は以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} x_{pgr1} & x_{tpw1} & 0.0 & z_1 & -y_1 \\ y_{pgr1} & y_{tpw1} & -z_1 & 0.0 & x_1 \\ 0.0 & 0.0 & y_1 & -x_1 & 0.0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{pgrm} & x_{tpwm} & 0.0 & z_m & -y_m \\ y_{pgrm} & y_{tpwm} & -z_m & 0.0 & x_m \\ 0.0 & 0.0 & y_m & -x_m & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_{20} \\ C'_{21} \\ \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ \vdots \\ v_{xm} \\ v_{ym} \\ v_{zm} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

PGR と TPW の成分を示す C'_{20} と C'_{21} はすべてのプレートに共通なパラメータとし、またオイラーベクトルに相当するパラメータはそれぞれのプレートごとに別々のパラメータとして組み合わせて全体の観測方程式を得た。上下の速度場と水平の速度場を用いて、これらの観測方程式に基づいて最小二乗法で、観測速度を全体的に最もよく説明するパラメータの組み合わせを推定した。なお、公開データの中で与えられている速度の観測誤差から重み行列を作り、重み付き最小自乗法を用いてパラメータ推定している。これらの結果を次章で示し、推定値が有効であるか評価する。

第3章

解析結果およびプレート運動モデルの 評価

3.1 解析結果

水平方向の速度場における2章で示したGPSデータと、推定されたオイラーベクトル、PGR、TPWに起因する成分から予測される速度を図3-1で示す。また、今回の推定によって得られたPGR、TPW成分のみを示したものを、水平方向・鉛直方向にわけて図3-2、図3-3、図3-4に示す。図3-1、図3-2から、PGRとTPWに起因する速度成分と同時推定したことによるプレート運動パラメータへの影響はほとんど見られないことがわかる。PGR、TPWに関する成分は次章で考察する。

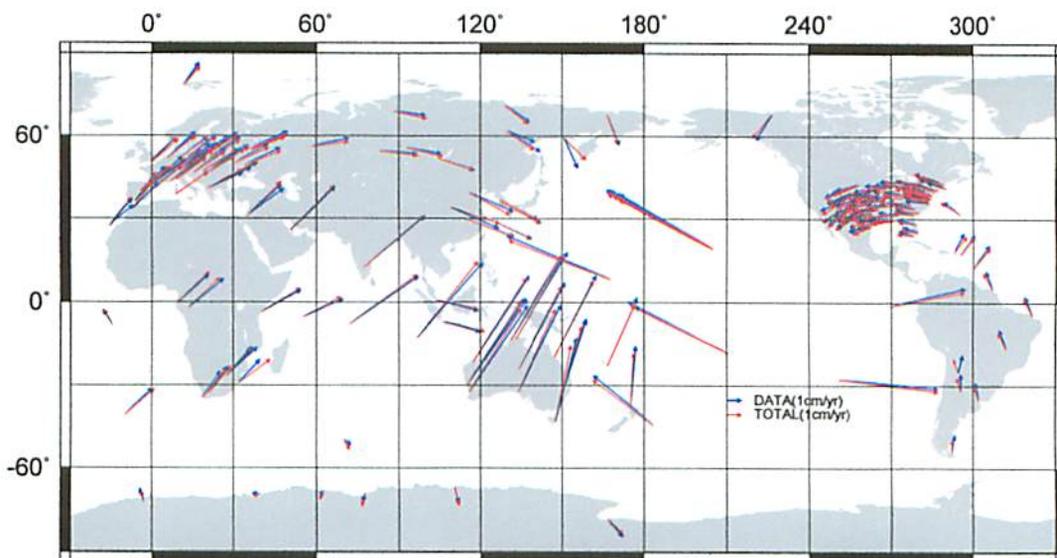


図 3-1: GPS によって測定された世界各局の速度データと、推定から計算された速度ベクトルの比較

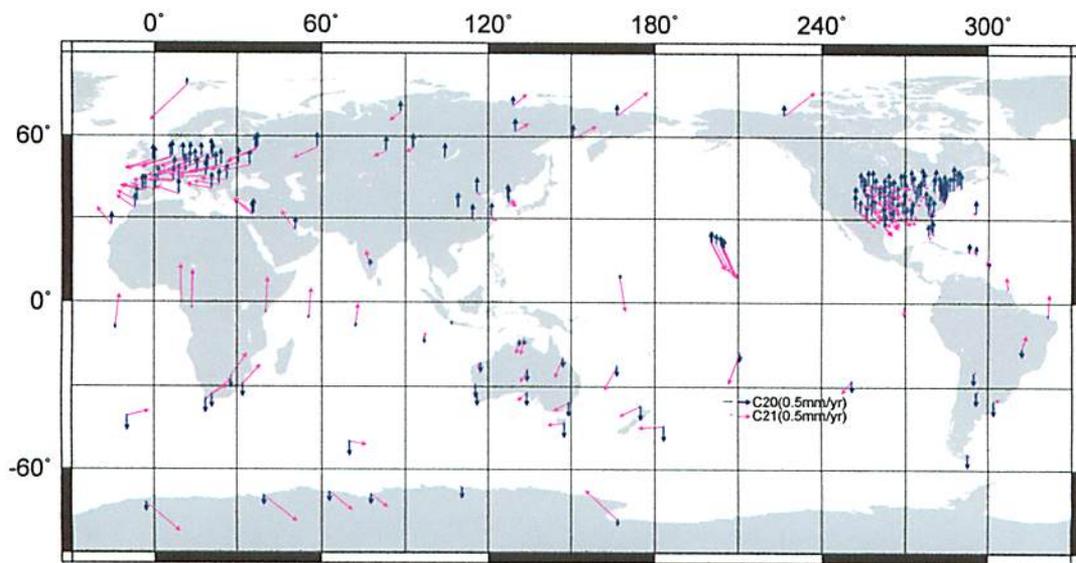


図 3-2: 推定された, PGR と TPW による水平速度成分

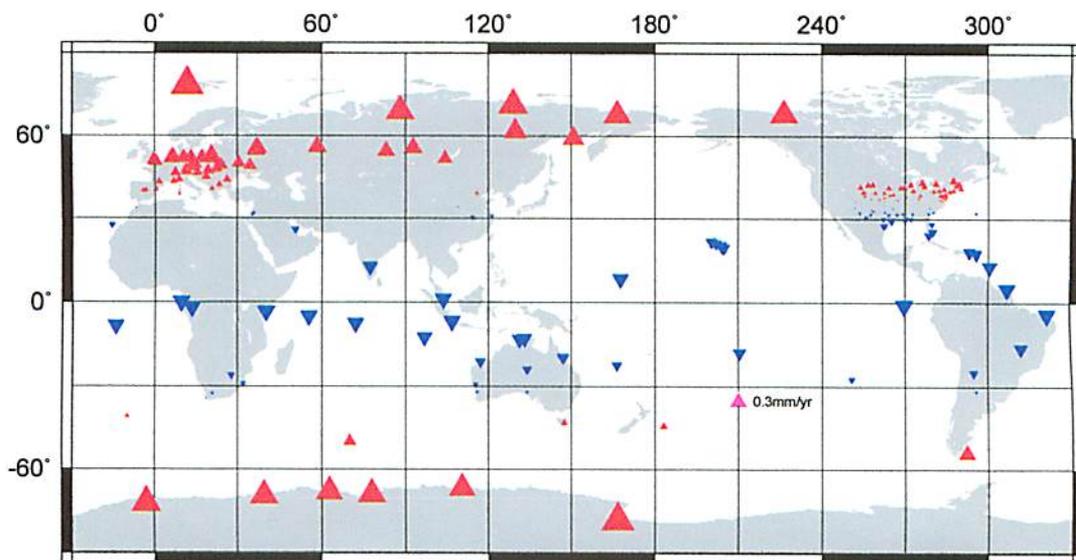


図 3-3: 推定された PGR による上下速度成分

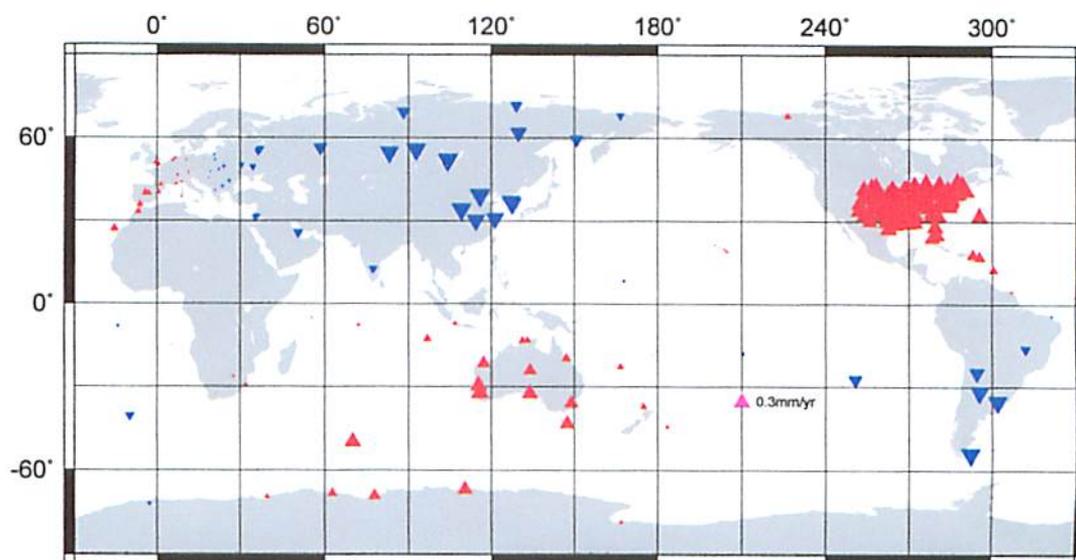


図 3-4: 推定されたTPWによる上下速度成分

3.2 プレート運動モデルの評価

直交座標系で求められたオイラーベクトルを球面座標系に変換し、本研究でPGR/TPW成分と併せてプレート毎に推定されたオイラー極の位置と回転速度を、最近Prawirodirdjo and Bock (2004) によってGPSデータに基づいて得られたものと (PGR/TPWは考慮していない) と地質学的な時間スケールにおいて推定されたNUVEL1a(Demets et al.,1994) と比較する。その結果、データが基本的にほぼ同じである前者に近い結果が得られた(図3-5, 図3-6)。オイラー極位置は、(Prawirodirdjo and Bock, 2004) に与えられている 2σ の誤差範囲内からはみ出すものも見られたが、概して誤差範囲内で一致した。回転速度についても同様に、誤差範囲内でほぼ一致した。

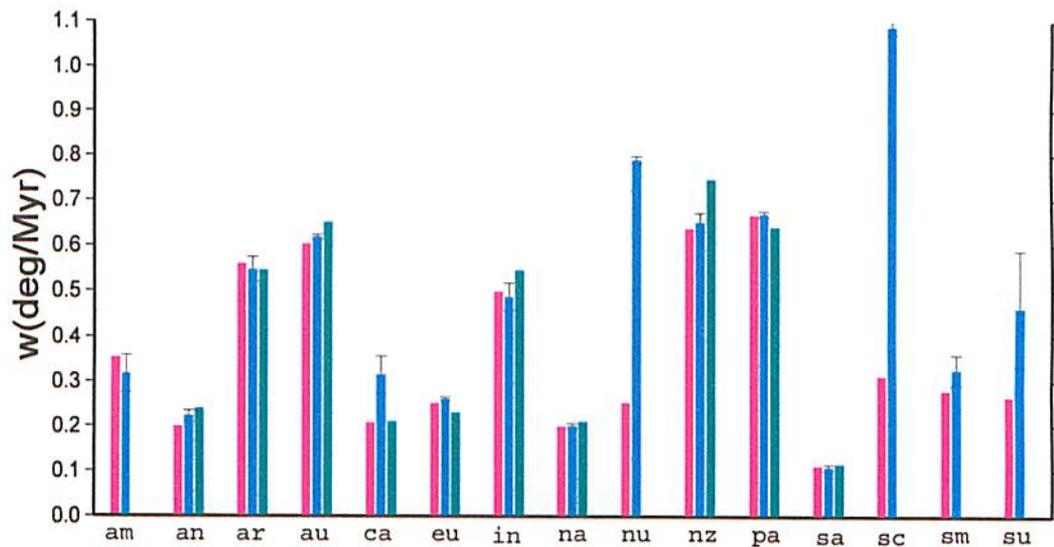
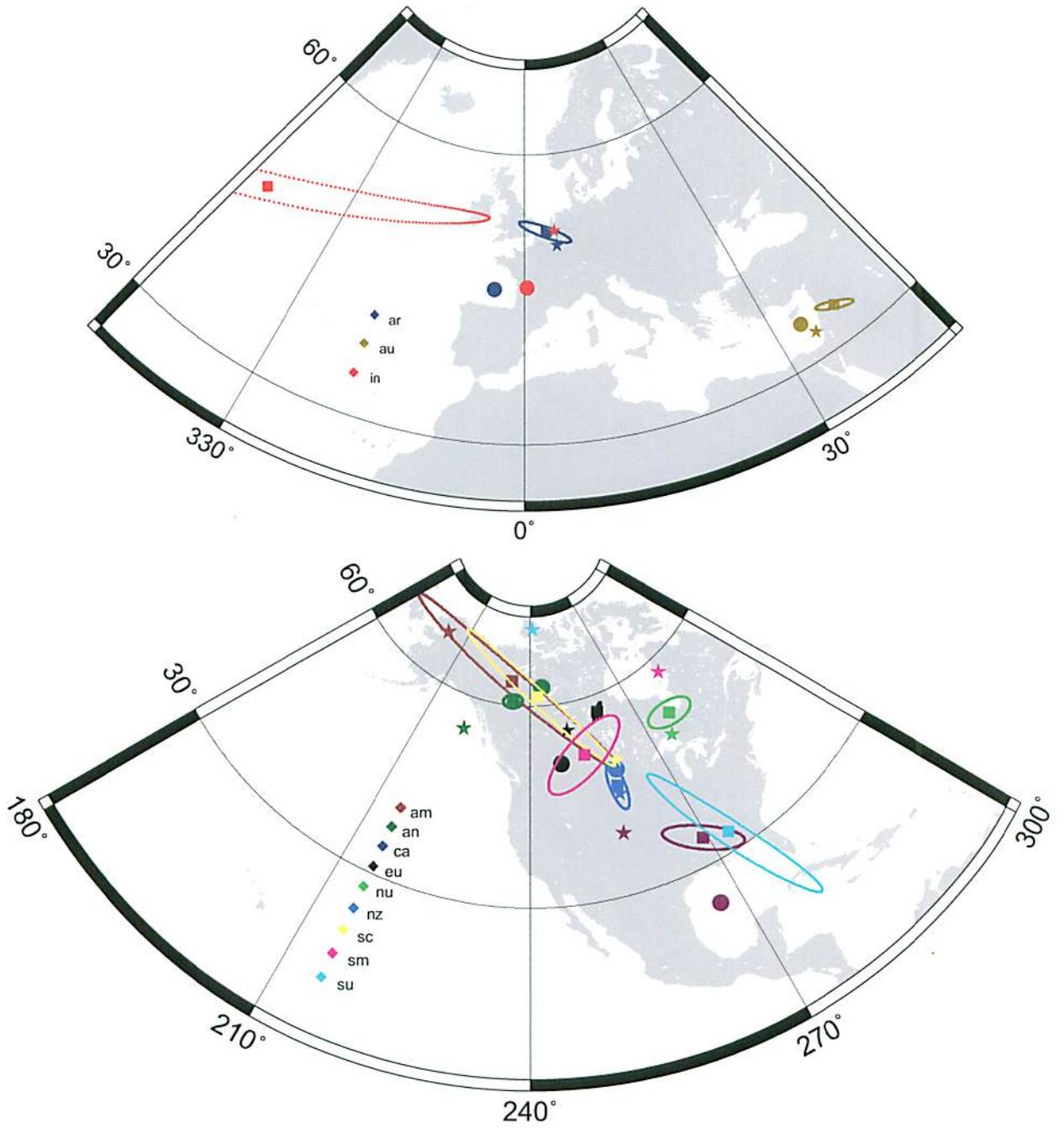


図3-5: 回転速度の大きさの比較 ピンク：今回の推定値, 青：Prawirodirdjo and Bock(2004), 緑：NUVEL1a(Demets et al.1994)



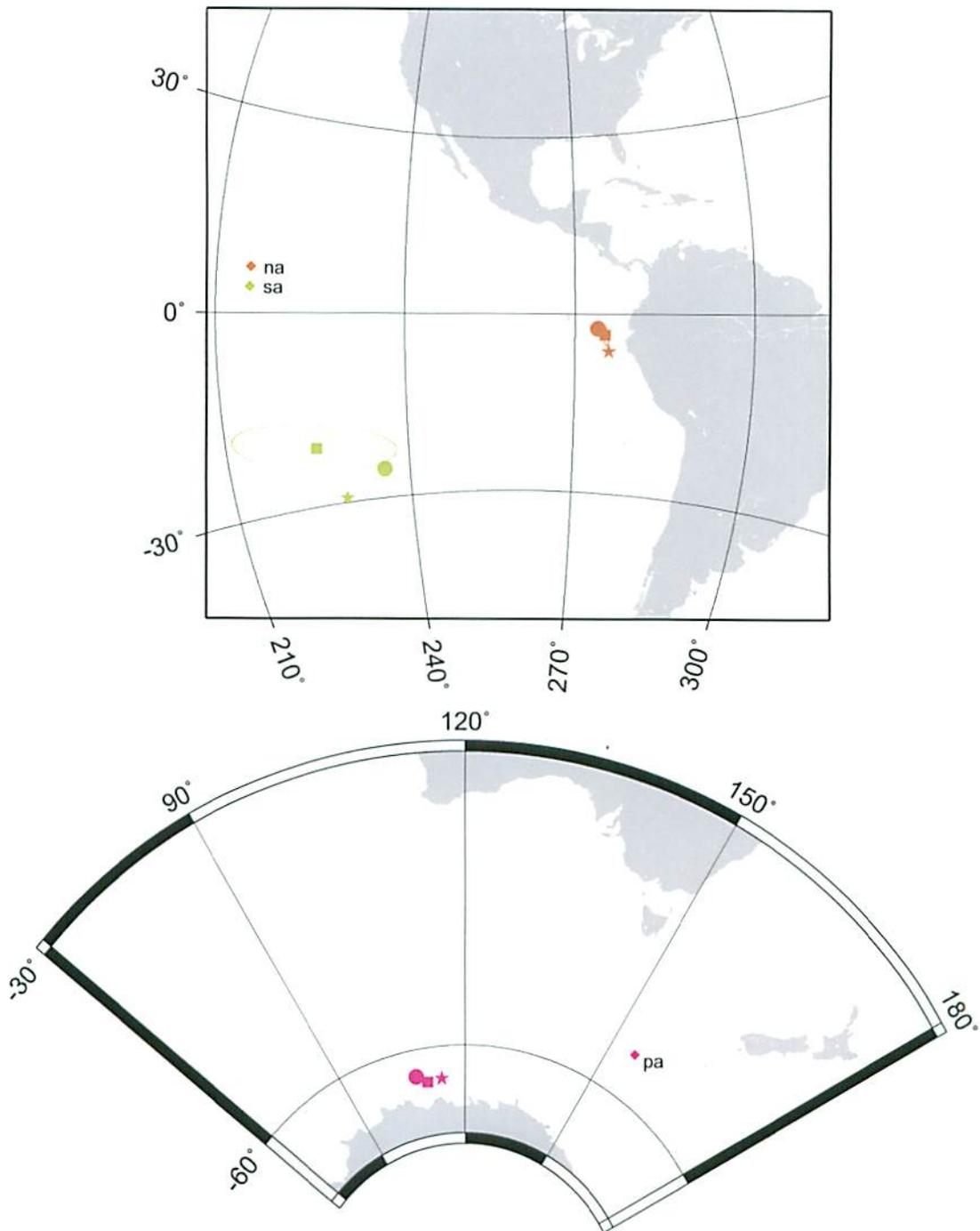


図 3-6: オイラー極の比較 (☆: 今回の推定値, ■: Prawirodirdjo and Bock(2004), ○: NUVEL1a(Demets et al.1994))

第4章

PGRとTPW成分の検出

上下方向の速度場と水平方向の速度場から推定された、それぞれのパラメータの値は、表4-1に示す。表4-1に示されている推定誤差は、パラメータ推定後の速度残差の二乗和を自由度で割った平方根(= χ)で掛けて現実的な値に補正している。

	P_{20} 成分	P_{21} 成分	χ
上下成分	0.618 ± 0.474	-0.363 ± 0.240	13.58
水平成分	0.408 ± 0.182	-1.517 ± 0.386	25.48

表 4-1: PGR/TPW 成分の推定結果 (mm/yr)

上下方向の誤差は、水平方向に比べて大きいですが、これは用いるデータの中にPGR/TPW以外の起源の変動が除去できていない可能性を示す。

三章で示したように、地球の変形し易さの指標としてラブ数・志田数がある。現実の層構造をもった地球の場合、二次の潮汐ラブ数 h ・志田数 l の値は、それぞれ $h = 0.61 - 0.62$, $l = 0.08 - 0.09$ の値をとることが知られている。しかし、今回の研究の対象となる現象は、潮汐よりずっと時定数の長い現象なので、地球深部の流動の影響が入ってきて上記のラブ数が示す応答よりずっと大きくなることが予測される。上下の変位の度合いを示すラブ数 h は、表面(リソスフェア)が固体であっても内部(アセノスフェア)が粘性流体ならばその影響が効きやすく、流動によって大きくなり易い。一方、水平方向の変形の度合いを示す志田数 l は、内部が粘性を持っていても、浅い部分のリソスフェアの剛性の影響が大きいため、下部の流動の影響が現れにくい。つまり、ラブ数に比べて志田数は表面の剛性の影響をより大きく受ける (Okubo and Saito, 1983)。

今回の地質学的時間スケールにおけるパラメータ推定で同じように考えた場合、

(1-10),(1-11)式より、二章で示した観測方程式(2-4),(2-5)式からパラメータを求めるならば、推定した C_{20} , C'_{20} の比がそのまま、この時間スケールにおける荷重ラブ数・志田数の比と考えることが出来る。弾性体の場合二次の荷重ラブ数 h' ・志田数 l' はそれぞれ、 $h' = -1.0$, $l' = 0.02$ をとり、その比は $h'/l' = 50$ となる。一方今回の推定によるラブ数・志田数の比は $h'/l' = 1.5$ となり、志田数がラブ数に対して相対的に大きくなっている。今回得られた値は、議論している時間スケールにおいて、より地球内部の流動性の影響を受け易い志田数が相対的に大きくなったものと考えられる。

TPW成分については、極が北米方向に傾いていることを考えた場合に推定される速度場と逆の符号が推定された。推定誤差から、有意にゼロと異なる値が推定されていることが示唆されているが、本来1にちかくなるべき水平方向の χ がかなり大きいことから、本研究で考慮したモデルで想定していない速度成分がかなりあることが示唆される。1章でも説明したが、Mitrovica et al.(2001)が予測したTPW/PGRによる速度場には、高次のzonalな成分やnon-zonalな成分などが入っているようである。GPSの観測局は昨今かなり均等に分布するようになったが、それでも陸上でしか観測できない等の原理的な制限があり、全球にバランスよく配置されているとはいえない。例えば速度場に今回推定しなかったnon-zonalな成分が含まれると考えると、今回推定したどこかのパラメータにその分が紛れ込む可能性がある。どのパラメータを選択して推定するのか、またそれらが現在のGPS網で分離できるのかの議論が今後重要である。

第5章

高次項を考慮した計算

最も新しい軌道解析の結果 (Cheng, M. and B.D. Tapley, 2004 AGU Fall Meeting) から, J_3 , J_4 , J_5 はそれぞれ, $-2.04 \times 10^{-11}/yr$, $-1.99 \times 10^{-11}/yr$, $2.28 \times 10^{-11}/yr$ という値が得られている. これらは, これまで議論してきた J_2 と同じオーダーであるため, これらの項がPGRの高次の項として速度場に影響を与える可能性がある. よって, さらに求めるパラメータ数を増やし計算を行った. P_{20}, P_{21} 成分に関しては, 4章で示す項に比例する係数を求める. 上下方向に関しては, P_{30} 成分は, J_3 の時間変化に相当する速度場, $(5 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta)/2$ に比例する速度場を推定した. P_{40} 成分は, P_{30} 成分と同様に J_4 の時間変化に相当する $(35 \sin^4 \theta - 30 \sin^2 \theta + 3)/8$ に比例する速度場を, P_{50} 成分は, $(63 \sin^5 \theta - 70 \sin^3 \theta + 15 \sin \theta)/8$ に比例する速度場を求めた. 上下方向に関しては, これら五つのパラメータの同時推定を行った. 水平方向に関しては, θ に関してそれぞれの項を偏微分した, $((15 \sin^2 \theta - 3) \cos \theta)/2$, $((70 \sin^3 \theta - 30 \sin \theta) \cos \theta)/4$, $((315 \sin^4 \theta - 210 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta)/8$ に比例する速度成分として水平方向の P_{30} , P_{40} , P_{50} 成分と, プレート運動を同時に推定した.

推定した結果を表5-1に示す. 得られた推定誤差は, 4章と同様正規誤差に χ を掛けて補正してある. 水平方向における推定で, 同時に得られたオイラーベクトルから求められたオイラー極と回転速度は, 3章同様, Prawirodirdjo and Bock(2004) で与えられている 2σ の誤差範囲内にほぼおさまっており, パラメータ数を増やすことでの, プレート運動パラメータへの影響は見られなかった.

表4-1と表5-1を比較してみると, P_{21} 成分が不安定であると考えられる. これは, 4章で説明したように, 局分布が一様でないために, 相関を持つ他のパラメータの導入に伴って推定値が変化してしまったものかもしれない. 上下成分・水平成分それぞれの, パラメータ推定における相関係数行列を(5-1), (5-2)式で示す. これを見る限り, 今回求めたパラメータ間に大きな相関はなく, 特定のパラメータ間の分離

が悪いという状況ではなさそうである。一方、得られた χ はいまだ大きく、今回のモデルで考慮されていない速度成分、例えば non-zonal な球関数に相当する速度などの寄与が大きいことを示唆する。

現在行われている衛星重力ミッションにより、これまで得られていなかった球関数の高次項の永年変化が得られることが期待される。それらを用いることで他の組み込むべきパラメータを求め、検出を可能にしていくことは今後の課題である。

	P_{20}	P_{21}	P_{30}	P_{40}	P_{50}	χ
上下成分	1.193 ± 0.501	-0.766 ± 0.305	1.299 ± 0.514	-0.347 ± 0.615	2.332 ± 0.652	12.91
水平成分	0.320 ± 0.175	-0.266 ± 0.416	0.424 ± 0.154	-0.185 ± 0.143	-0.460 ± 0.008	23.10

表 5-1: 高次項を考慮したパラメータ推定結果 (mm/yr)

$$\begin{bmatrix}
 1. & 0.008 & -0.216 & 0.082 & 0.323 \\
 0.008 & 1. & -0.277 & -0.527 & 0.203 \\
 -0.216 & -0.277 & 1. & -0.168 & -0.131 \\
 0.082 & -0.527 & -0.168 & 1. & -0.482 \\
 0.323 & 0.203 & -0.131 & -0.482 & 1.
 \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

$$\begin{bmatrix}
 1. & -0.113 & -0.130 & 0.160 & -0.079 \\
 -0.113 & 1. & 0.294 & -0.375 & -0.005 \\
 -0.130 & 0.294 & 1. & -0.397 & 0.466 \\
 0.160 & -0.375 & -0.397 & 1. & -0.424 \\
 -0.079 & -0.005 & 0.466 & -0.424 & 1.
 \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

謝辞

宇宙測地学研究室に所属してから約10ヶ月間、宇宙測地学研究室の日置幸介教授には基礎的な勉強から、データ解析の手法、研究の方針、論文の校正等何から何まで終始熱心かつ丁寧なご指導を頂戴しました。先生のおかげでここまでどうにかやってこれました。この場を借りて、厚くお礼申し上げます。そして、これからもよろしく願います。

約10ヶ月間共に学び励ましあってきた、同研究室の佐藤真悠さんと二本柳芳宜さんにも感謝しています。ありがとうございました。さまざまな方に支えられて、本論文を書き上げることが出来ました。みなさまに感謝いたします。本当にありがとうございました。

平成17年1月28日

小川 涼子

参考文献

- [1] C.DeMets,R.G. Gordon,D.Argus,and S.Steon,"Current plate motions,"*Geophys.J.Int.*101, 425-478,1990.
- [2] C.DeMets, R.G. Gordon,S. Stein and D.Argus, "Effects of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions,"*Geophys.Res.Lett.*21, 2191-2194,1994.
- [3] C. F. Yonder,J.G. Williams,J.O. Dickey,B.E. Schutz,B.J.Eanes,and B.D. Tapley,"Seular variation of the Earth's gravitational Harmonic J_2 coefficient from Lageos and non tidal acceleration of Earth rotation," *Nature* 303,757-762,1983.
- [4] C.M. Cox,B.F. chao,"Detection of large-scale mass redistribution inthe terrestrial system since 1998," *Science* 297,831-833,2002.
- [5] D. Argus and R.G. Gordon,"No-net-rotation model of current plate velovities incorporating plate motion models NUVEL-1,"*Geophys.Res.Lett.*18,2039-2042,1991.
- [6] D.L. Turcotte,G.Schubert,"*Geodynamics Second Edition*," CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,pp 456,2002
- [7] G.G. Sella, T.H. Dixon,A.L. Mao,"REVEL: A model for recent plate velocities from space geodesy,"*J.Geophys.Res.*107,2081,doi:10.1029/2000JB000033,2002.
- [8] G.A. Milne,J.X. Mitrovica,H.Scherneck,J.L. Davis,J.M. Johansson,H.Koivula,and M. Vermeer,"Continuous GPS measurements of postglacial adjustment in Fennoscandia: 2.Modeling results," *J.Geophys.Res.*109,doi:10.1029/2003JB002619,2004.
- [9] International Earth Rotational and Reference Frame Service(IERS),<http://www.iers.org/>
- [10] J.B. Minster,T.H. Jordan,P.Molner and E.Haines,"Numerical modelling of instantaneous plate tectonics,"*Geophys.J.R. Astr,Soc.*36,541-576,1974.
- [11] J.B.Minster,T.H. Jordan,"Present-day plate motins,"*J.Geophys.Res.*83,5331-5534,1978.
- [12] J.Okuno and M.Nakada,""Effects of water load on geophysical signals due to glacial rebound and implications for mantle viscosity,"*Earth Planets Space*,53,1121-1135,2001.
- [13] J.X. Mitrovica,G.A. Milne,and J.L. Davis,"Glacial isostatioc adjustment on rotation earth,"*Geophys,J,Int*,147,562-578,2001.
- [14] L. Praworodirdjo and Y. Bock,"Instantaneous global plate motion model from 12 years of continuous GPS observations,"*J.Geophys.Res.*109,doi:10.1029/2003JB002944,2004.
- [15] M.Heflin, <ftp://sideshow.jpl.nasa.gov/pub/mbh/>

- [16] M.K. Cheng, C.K. Shum, and B.D. Tapley, "Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations," *J. Geophys. Res.* 102, 22377-22390, 1997.
- [17] M. Cheng and B.D. Tapley, "Secular variations in the low degree zonal harmonics from 28 years of SLR data," *American Geophysical Union 2004 Fall Meeting*, paper G31C-0801, 2004.
- [18] M.U. Sagitov, B. Bodri, V.S. Nazarenko, and Kh.C. Tadzhidinov, "Lunar Gravimetry," *International Geophysical Series Volume 35*, pp.298, Academic Press, London, 1986.
- [19] S. Okubo and M. Saito, "Partial derivative of Love numbers," *Bull. Geod.* 57, 167-179, 1983.
- [20] 上田誠也・水谷仁, 「岩波講座 地球科学1 地球」, 岩波書店, pp.318, 1978
- [21] 大久保修平・里村幹夫・日置幸介・飛田幹男, 「地球が丸いって本当ですか?」, 朝日選書, pp.275, 2004
- [22] 瀬野徹三, 「プレートテクトニクスの基礎」, 朝倉書店, pp.190, 1995
- [23] 中川徹, 小柳義夫, 「最小二乗法による実験データ解析」, pp 206 東京大学出版会, 1982.
- [24] 日本測地学会, 「測地学」, 日本測地学会創立 50 周年記念 CD-ROM テキスト, 2004.

付録A

PGRの式の導出

PGRを半無限粘性流体モデルで考える。

水平一方向は荷重が一樣とし、鉛直方向を y 軸として、 (x, y) の二次元で考える。表面の初期の変位 w は、

$$w_m = w_{m0} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{A-1})$$

とし、 λ は波長で、 $w_m \ll \lambda$ である。重調和方程式を流れ関数 Ψ について解くことで、流れは求められる。ここで、 (x, y) の速度成分 (u, v) は、

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{A-2})$$

である。 Ψ をまず、 x と共に周期的に変化すると仮定する。つまり、以下となる。

$$\Psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} Y(y) \quad (\text{A-3})$$

ここで、 $Y(y)$ を求めていく。(A-3) 式を重調和関数に代入すると、

$$\frac{d^4 Y}{d^4 y} - 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{d^2 Y}{d^2 y} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 Y = 0 \quad (\text{A-4})$$

$Y = e^{my}$ とすると、 m の式が得られ (m は任意定数) 、

$$m^4 - 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 m^2 + \frac{2\pi^4}{\lambda^4} = \left(m^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right)^2 = 0 \quad (\text{A-5})$$

$Y(y)$ の可能な解が得られる。しかし、四階微分であるから、もう二つの解も直接代入することで得られる。 Ψ の一般的な解は、これら四つの解の合計であるから、以下のようなになる。

$$\Psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} (Ae^{-\frac{2\pi y}{\lambda}} + Bye^{-\frac{2\pi y}{\lambda}} + Ce^{\frac{2\pi y}{\lambda}} + Dye^{\frac{2\pi y}{\lambda}}) \quad (\text{A-6})$$

任意定数A,B,C,Dは、境界条件を与えることで求められる。まずをyを無限大とすると、 $C = D = 0$ となり、 Ψ は、

$$\Psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{(-\frac{2\pi y}{\lambda})} (A + By) \quad (\text{A}\cdot 7)$$

と導かれる。(A.2),(A.3)式から、

$$u = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{(\frac{2\pi y}{\lambda})} \left(\frac{2\pi}{\lambda} (A + by) - B \right) \quad (\text{A}\cdot 8)$$

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{(-\frac{2\pi y}{\lambda})} (A + By) \quad (\text{A}\cdot 9)$$

$y = w$ で速度の水平成分がゼロとする。ただし今、 $w \ll \lambda$ であるから、 $y = 0$ で、 $u = 0$ とする。この条件を適用すると、

$$B = \frac{2\pi}{\lambda} A \quad (\text{A}\cdot 10)$$

よって速度場は、(A.8),(A.9)式より、

$$\Psi = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{(-\frac{2\pi y}{\lambda})} \left(1 + \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \quad (\text{A}\cdot 11)$$

$$u = A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 y e^{(-\frac{2\pi y}{\lambda})} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

$$v = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{(-\frac{2\pi y}{\lambda})} \left(1 + \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \quad (\text{A}\cdot 13)$$

最後にAを求める。地表面での圧縮成分は、地面の高さ w 分の質量に重力加速度 g がかかる力とつりあうので、密度 ρ 、圧力 P 、粘性係数 μ とすると、 $y = 0$ で、(A.14)式で示される。

$$-\rho g w = P - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A}\cdot 14)$$

(A.14)式の条件を適用するには、 $y = 0$ での、圧力 P と $(\frac{\partial v}{\partial y})_{y=0}$ を求めなければならない。ここで、水平方向の力平衡の式から、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A}\cdot 15)$$

より、(A.13)式を代入し、積分すると

$$P = 2\mu A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{A}\cdot 16)$$

よって、

$$w_{y=0} = -\frac{2\mu A}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{A}\cdot 17)$$

が得られ $w \ll \lambda$ より、 $(\frac{\partial w}{\partial t})_{y=0} = v_{y=0}$ となり、

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{y=0} = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{A}\cdot 18)$$

が得られる。(A-17)と(A-18)式から、 $y=0$ での w は、以下を満たす。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\rho g \lambda}{4\pi\mu}\right)w \quad (\text{A-19})$$

$t=0$ のとき、 $w = w_m$ の初期条件で(A-19)式を積分すると、

$$w = w_m \exp\left(-\frac{g\lambda}{4\pi\nu}t\right) \quad (\text{A-20})$$

ここで、 τ_r を

$$\tau_r = \frac{4\pi\mu}{\rho g \lambda} \quad (\text{A-21})$$

とすると、PGRの変位を示す式は

$$w = w_m e^{(-\frac{t}{\tau_r})} \quad (\text{A-22})$$

と求めることが出来る。

付録B

最小二乗法

本研究において、パラメータ推定の際に最小二乗法を用いて計算した。重みを考慮した最小二乗法の定式化について説明する。

測定値 y を定数として真値 y^0 に対する推定値 \hat{y} に関する分布を考えたとき、つまり、

$$L(\hat{y}) \equiv L(\hat{y} | y) \equiv P(y; \hat{y}) \quad (\text{B.1})$$

とする。この $L(\hat{y} | y)$ を尤度という。 n 回測定の結果、測定値 y_1 から y_n まで得られたとすると、推定値 \hat{y} の尤度関数は、確率分布を総合するとき積をとるように、 n 個の尤度関数の積をとればよいつまり、

$$L(\hat{y}) = \prod_{i=1}^n L(\hat{y} | y_i) \quad (\text{B.2})$$

となる。この尤度関数が最大となる位置を真値 y^0 の最尤推定値 \hat{y} として採用する方法を最尤推定法という。本研究で用いている、最小二乗法は最尤推定法のひとつであるが、誤差の分布がガウス分布であるという前提が用いられている。ガウス分布は、測定値 y_i 、計算値 \hat{y}_i 、分散を σ_i^2 とすると、

$$P(y_i; \hat{y}_i) = (2\pi\sigma_i^2)^{-1/2} \exp(-y_i - \hat{y}_i^2/2\sigma_i^2) \quad (i = 1 \sim n) \quad (\text{B.3})$$

で示される。(B.1),(B.2),(B.3) から、全計算値 \hat{y} に関する尤度は、

$$\begin{aligned} L(\hat{y} | y) &= \prod_{i=1}^n L(\hat{y} | y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P(y_i; \hat{y}_i) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B-4の両辺のlogをとると,

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2} + C \quad (\text{B-5})$$

となる。Cは定数である。 $\hat{y}_i = f_i(x_i)$ として、パラメータ推定値 \hat{x} で書き換えると,

$$\log L(\hat{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f_i(\hat{x}))^2}{\sigma_i^2} + C \quad (\text{B-6})$$

尤度を最大にするためには,

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f_i(\hat{x}))^2}{\sigma_i^2} = \min \quad (\text{B-7})$$

となればよい。今回は線形モデルとして計算できるので,

$$\begin{aligned} f_i(x) &= A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{im}x_m \\ &= \sum_{j=1}^m A_{ij}x_j \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

と表すことができ(ただし, A_{ij} はパラメータ x に依存しない係数),これをB-7に代入すると,

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \sum_{j=1}^m A_{ij}x_j]^2 / \sigma_i^2 = \min \quad (\text{B-9})$$

となる。(B-9)式を満たすためには, x_j でそれぞれ微分をとったものが0になればよいので,以下を満たせばよい。

$$-2 \sum_{i=1}^n [y_i - \sum_{j=1}^m A_{ij}x_j] \cdot A_{ij} / \sigma_i^2 = 0 \quad (\text{B-10})$$

これを $x_{j'}$ に関して整理すると,

$$\sum_{j'=1}^m \left(\sum_{i=1}^n A_{ij'} A_{ij} / \sigma_i^2 \right) x_{j'} = \sum_{i=1}^n (A_{ij} / \sigma_i^2) y_i \quad (\text{B-11})$$

と示せる。ここで,

$$B_{ij'} \equiv \sum_{i=1}^n A_{ij'} A_{ij} / \sigma_i^2 \quad (\text{B-12})$$

$$b_j \equiv \sum_{i=1}^n (A_{ij} / \sigma_i^2) y_i \quad (\text{B-13})$$

とすると,(B-11)式は,

$$\begin{cases} B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + \cdots + B_{1m}x_m = b_1 \\ B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + \cdots + B_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ B_{n1}x_1 + B_{n2}x_2 + \cdots + B_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (\text{B-14})$$

で示される連立方程式となり,この方程式を解くと \hat{x} を求めることが出来る。