

大気海洋の力学

見延 庄士郎

平成 23 年 7 月 22 日

目次

第 I 部 地球流体力学	7
第 1 章 浅水および 3 次元支配方程式系	9
1.1 全微分*	9
1.2 運動方程式 (非回転系)*	10
1.3 慣性系での運動方程式*	10
1.4 静水圧の式	11
1.5 回転系での水平運動方程式*	11
1.6 浅水方程式系	14
1.6.1 運動方程式	15
1.6.2 連続の式*	16
1.6.3 線形化	17
1.7 3次元原始方程式	17
1.8 地衡流・地衡風*	17
1.8.1 温度風 (thermal wind)*	18
1.9 拡散・粘性**	18
1.10 定積比熱と定圧比熱	19
1.11 温位	20
1.12 浮力振動数	21
1.13 演習問題	21
第 2 章 浅水波動	23
2.1 重力波*	23
2.2 慣性振動*	24
2.3 慣性重力波**	25
2.4 沿岸ケルビン波*	25
2.5 浅水方程式の無次元化**	27
2.6 浅水方程式から v のみの式の導出***	27
2.7 演習問題	28
2.8 matlab スクリプト	28
2.8.1 慣性重力波などの無次元分散関係	28
第 3 章 渦位の保存	29
3.1 角運動量の保存からの渦位保存*	29
3.2 剛体回転する円柱の角運動量保存*	29
3.3 層モデルにおける渦位保存の証明***	31

第 4 章	ロスビー波	33
4.1	渦位保存による波*	33
4.2	長波ロスビー波*	33
4.3	短波ロスビー波*	36
4.4	一般流の効果を含めた短波ロスビー波*	36
4.5	演習問題	37
4.5.1	Rossby 波の分散関係の導出**	37
第 5 章	準地衡流方程式	39
5.1	非発散渦度方程式**	40
5.2	非線形 1 層準地衡流方程式の導出**	40
5.3	境界条件と boundary forcing***	43
5.4	非線形 1.5 層準地衡流方程式の導出 (オーダーの推定をまじめに)***	43
5.4.1	Boundary Forcing ***	46
5.5	連続成層準地衡流方程式 (非粘性) の導出 **	47
5.6	問題	49
第 6 章	赤道波動	51
6.1	赤道 β 平面での無次元化**	51
6.2	赤道ケルビン波*	52
6.3	ロスビー波・混合ロスビー重力波・慣性重力波**	52
6.4	外力による赤道波の励起***	56
6.5	Matlab スクリプト	59
6.5.1	分散関係の描画	59
6.5.2	エルミート関数と赤道波の南北構造の描画	60
第 7 章	海洋風成循環	63
7.1	スウェルドラップ・バランス*	63
7.2	西岸境界流*	64
7.2.1	ストンメル層*	64
7.2.2	ムンク層**	65
7.3	Island Rule**	66
第 8 章	鉛直モード展開	69
8.1	非粘性連続成層での鉛直モード展開 **	69
8.1.1	一様成層の場合	72
8.1.2	鉛直モード展開への風応力の導入 ***	72
8.2	鉛直モード展開への鉛直粘性・拡散係数の導入 ***	73
8.3	鉛直モード展開の計算方法**	74
8.4	2 層モデルにおける鉛直モード*	75
8.5	層モデルでの鉛直モード展開 **	77
8.6	層モデルでの鉛直モード展開 (N.5 層モデル)***	80
8.7	大気の大気第一モード	80

第 9 章 傾圧不安定	83
9.1 複素数の周波数*	83
9.2 傾圧不安定のメカニズムの概念的理解*	84
9.3 Eady 問題**	86
9.4 不安定の必要条件**	89
9.5 Matlab スクリプト	90
第 II 部 大気海洋相互作用	91
第 10 章 エル・ニーニョの主要理論	93
10.1 熱帯のフィードバック	93
10.2 理論のクラス：サイクルかイベントか	93
10.3 直感的な遅延振動子方程式の提案	94
10.4 遅延振動方程式の導出	94
10.5 充填放出振動子の導出	97
10.6 充填放出振動子を支持する観測	99
第 11 章 中緯度の海洋から大気への影響	101
11.1 Hoskins Karoly の考察	101
11.2 Palmer and Sun (1985) の理論	102
11.3 Hoskins and Valdes (1990) の数値実験	104
11.4 Peng の一連の数値実験	104
11.5 Kushnir et al. (2002) のまとめ	104
11.6 東西一様場からのずれの数値計算	105
11.7 経年変動 (気候値からのずれ) の数値計算	105
11.8 観測から示唆される海洋から大気へのフィードバック	111
11.9 引用文献	111
第 12 章 十年変動の力学	115
12.1 大気の色外力への海洋の応答	115
第 13 章 準地衡流方程式の数値計算	117
13.1 1 層浅水浅水準地衡流方程式の差分方程式の解法	117
13.2 1.5 層非線形準地衡流差分方程式の解法	118
13.2.1 境界条件の数値計算への実装***	119
13.3 数値計算プログラム	119
第 14 章 Appendix A. 数学メモ	125
14.1 初等関数	125
14.1.1 三角関数	125
14.2 外力がある場合の一階線形偏微分方程式の解法	126
14.3 スツルム・リュービル型の固有値・固有関数問題	126
14.4 エルミート関数の漸化式	126

第I部

地球流体力学

第1章 浅水および3次元支配方程式系

この章は大幅な変更途中ですので、記述が重複していたり、あまりこの章にふさわしくない話題が入っていたりしています。

この章では、大規模な大気海洋を議論する基礎となる、浅水方程式 (shallow water equations) を導き出そう。浅水方程式とは、回転する座標系での、密度一様な流体の運動を記述するもので、次の3式からなる連立方程式系である。浅水方程式は、この授業を通じて使うだけでなく、さらに大学院レベルあるいは研究の現場でもよく用いられる。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで、 x, y はそれぞれ東西・南北方向の座標、 u, v は東西・南北方向の流速、 η は流体の表面変位 (盛り上がり)、 h は流体の厚さ、 H は静止状態での流体の厚さである。 η, h, H の間には、 $\eta = h - H$ という関係が成り立つことを見て取るのは容易だろう。

1.1 全微分*

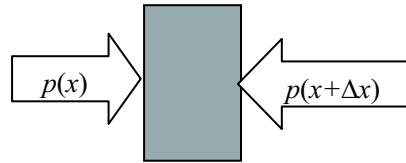
流体が持つある物理量 q があるとしよう。これは温度でもいいし、ある方向の速度でもいい。この物理量の微小変化 δq を考える。この変化は、3次元の空間と1次元の時間を合わせた4次元 (広義の) 空間 (t, x, y, z) では、

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial t} \delta t + \frac{\partial q}{\partial x} \delta x + \frac{\partial q}{\partial y} \delta y + \frac{\partial q}{\partial z} \delta z$$

となる。従って、これを δt で割ると

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = u$ と置いた。これは流体粒子に着目して、それを追跡するという立場を表している。これが全微分 (total derivative)、またはラグランジェ微分、または物質微分である。一方、 $\partial q / \partial t$ はオイラー微分 (Euler derivative) と呼ばれる。



ただし dq/dt という記号は物質微分を表すのか、あるいは単に独立変数が t だけの関数 q についての時間微分なのか、は記号だけでは判断し難い。どちらであるかを定めるのは、 q に対する独立変数が何であるかに依存するのである。そこで物質微分であることを明確にするために、 D/Dt という記号も使われる。すなわち、

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})q \quad (1.2)$$

である。

1.2 運動方程式 (非回転系)*

運動の記述の基礎になるのは、流体であろうが物体であろうが、ニュートンの運動方程式、つまり

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

である。ここで加速度は物質微分で評価する必要がある。一方、右辺の力には、「圧力傾度力」「粘性力」「重力」がある。

一方右辺の力には、圧力・粘性力・重力がある。この中で圧力はすべての方向から流体を押し、もし同じ圧力で押されるのであれば、流体粒子は動かない。したがって、圧力はその大きさが重要なのではなく、正味の圧力の差が重要になる。例えば x 方向であれば図1に示すように、 $x + dx$ と x との間の圧力差が生まれる。従って圧力傾度力は $-\nabla p$ と表される。ここでマイナス記号がついているのは、圧力が高い方から低い方に押されるためである。

重力は、鉛直上向き単位ベクトルを \vec{k} とすると、 $-\vec{k}g\rho$ と表される。結局、運動方程式は

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p - \vec{k}g\rho$$

である。ただし密度で両辺を割った

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{k}g \quad (1.3)$$

が、より一般に使われる。

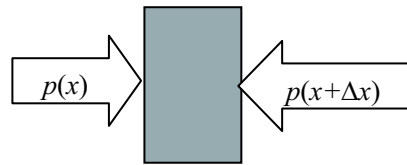
なお、上式では紙と鉛筆で解くことを想定して摩擦の効果を見捨てているが、実際の気象および海洋の運動では、摩擦が無視しえない場合が多い。

1.3 慣性系での運動方程式*

流体の一部に着目して、その運動を考えよう。運動の記述の基礎になるのは、流体であろうが物体であろうが、ニュートンの運動方程式、つまり、

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力} \quad (1.4)$$

である。



流体の場合、その質量は大きさを定めなくては決まらないので、単位体積辺りを考えることとしよう。また、流体に働く力は、「圧力傾度力」「重力」「摩擦」の3種類である。静止もしくは一定速度で運動している座標系（慣性座標系）での、単位体積当たりの流体の運動方程式は、この関係から、

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{g} + di\vec{f}f. \quad (1.5)$$

成分ごとに書けば

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{g} + di\vec{f}f. \quad (1.6)$$

である。ただし、左辺の時間の全微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.7)$$

である。この全微分はラグランジェ微分とも呼ばれ、流体に追従してその速度変化を表現する。一方時間の偏微分はオイラー微分とも呼ばれ、一点での速度変化を示す。例えば、川に浮かべた筏舟の速度変化はラグランジェ微分であり、ある地点に流速計を固定して得られる速度変化がオイラー微分である。¹

1.4 静水圧の式

運動方程式の右辺は、粘性項は当面気にしないこととすると、重力加速度は既知であるから、圧力をどう決めてやるかが問題である。ありがたいことに、大規模運動について言えば（例えば 10km×10km の領域での平均した速度）、鉛直方向の圧力はだいたい重力と釣り合うという、便利な性質がある。別な表現で言えば、左辺の鉛直加速度は、重力加速度よりもずっと小さい。²

したがって、鉛直方向の運動方程式は、

$$\partial p / \partial z = -g\rho \quad (1.8)$$

という静水圧の式 (hydro static equation) で、良い近似となっている。z の方向は鉛直上向きを正としており、圧力は下の方が高いことが、右辺の負号に表現されている。海や湖では 10m 潜ると 1 気圧がかかるというよく知られた関係も、その基礎はこの静水圧の式である。海水の密度は 1022~1029 kg/m³ の範囲に収まり、1%も変化しないので、浅水深度を知るといった目的には密度の変化を無視しても差し支えない。

1.5 回転系での水平運動方程式*

非回転での運動方程式は、地球の外の慣性系にいる観測者から見ると成り立つ。つまり回転を考えない運動方程式は、慣性系での観測者から見た位置 ($\vec{r}_i = (x_i, y_i)$) と速度 ($\vec{v}_i = (u_i, v_i)$) について成り立つので

¹ラグランジェ微分・オイラー微分は実感として掴みづらい面がある。一例として、たとえば定常に流れる滝での、鉛直速度 w を考えてみよう ($u = v = 0$)。定常の定義は $\partial w / \partial t = 0$ に他ならない。しかし、流体粒子を追跡すれば、時間と共に加速される。この加速度がラグランジェ微分 dw/dt である。

²この性質はただし、小規模な運動については良い近似ではない。たとえば、飛行機で遭遇するエアポケットや乱気流では、乗客がバランスを失うほどの加速度が生じている。その加速度の向きが比較的短い時間で変化することが、小規模運動に伴うものであることを示している。

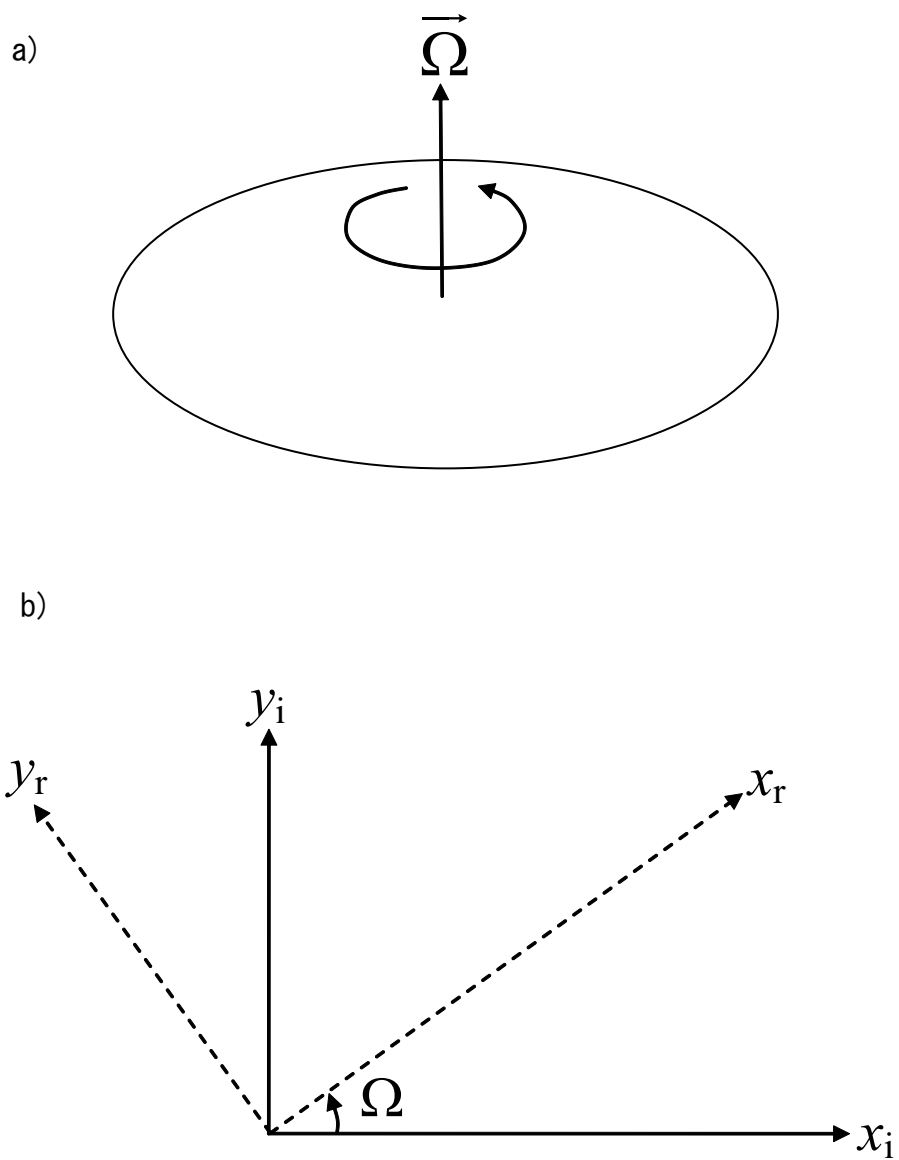


図 1.1: a) 回転ベクトル . b) 慣性系の座標 (実線) と回転系の座標 (破線) の関係 .

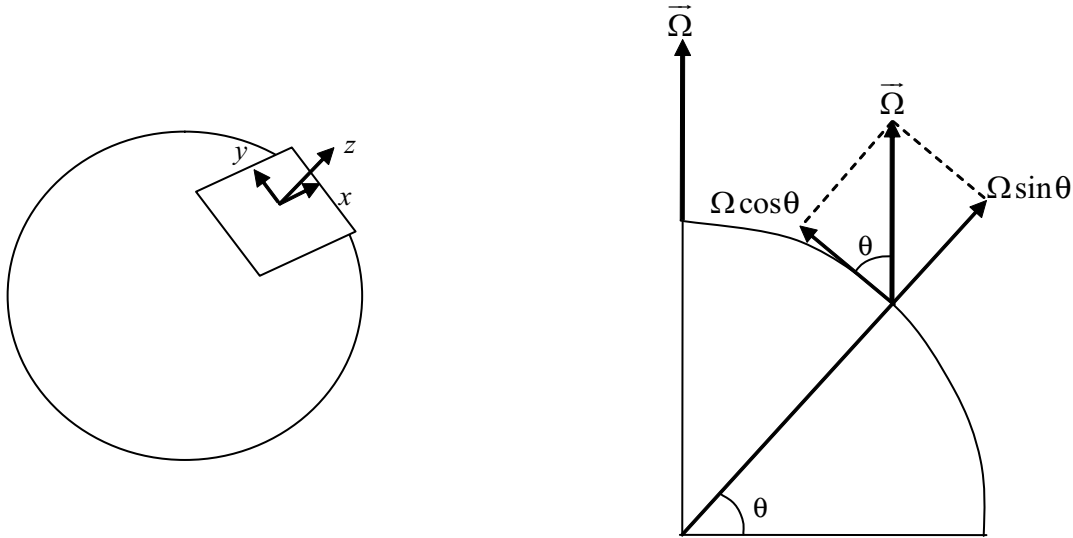


図 1.2: a) 座標系 . b) 地球の回転ベクトルの座標系の各成分への投影 .

ある . ここで添え字 i は慣性系 (inertia system) を意味している . しかし我々にとって便利に使えるためには , 地球に固定された座標 (位置 $(\vec{r}_r = (x_r, y_r))$ と速度 $(\vec{v}_r = (u_r, v_r))$) で記述する必要がある .

今欲しいのは , 運動方程式の左辺にある加速度が , どう回転系であらわされるかである . 加速度は速度の時間微分であるので , 慣性系の時間微分という演算が , 回転系でどう表現されるかを示すことが出来ればよい . そこでまず , 回転系での速度ベクトルを考えよう . 慣性系での速度ベクトルと , 座標系が回転することによる速度ベクトルの合成になる . 回転系が回転することによる速度ベクトルは , ベクトルの外積³を使って , $\vec{\Omega} \times \vec{r}_r$ とあらわすことができる . したがって ,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

となる . これは

$$\frac{d\vec{r}}{dt_i} = \frac{d\vec{r}}{dt_r} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_r$$

と時間微分演算子を使ってあらわすことができる . 位置ベクトルは慣性系でも回転系でも同じであり , かつ任意のベクトル \vec{r} に対して上式が成り立つことから , 二つの系の時間微分演算には

$$\frac{d}{dt_i} = \frac{d}{dt_r} + \vec{\Omega} \times$$

という関係が成り立たなくてはならない .

$$\frac{d\vec{r}}{dt_i} = \frac{d\vec{r}}{dt_r} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_r$$

従って , 慣性系での加速度は

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt_i} &= \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_i = \frac{d(\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt_r} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt_r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

³ちなみにベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積は ,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

第二と第三項をまとめて

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt_i} = \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1.9)$$

となる．この第二項がコリオリ (Coriolis) 項，第三項が遠心力 (Centrifugal force) 項である．一般に遠心力は重力に含めて考える．つまり重力が遠心力の効果を含んだものとして定義される．コリオリ項は運動方程式に残す．コリオリ力は， \vec{v}_r がないと生じない，すなわち回転系の座標系に相対的に運動している物体にのみ働くことを注意しよう．

(1.9) はベクトル形式で書いているので，実際に解析を行うには，特定の座標系で表現しなくてはならない．地球流体を議論する場合の座標系は，考える地点を中心として，東向きに x ，北向きに y ，鉛直上向き (紐に下げた錘が指し示す方向，重力と遠心力の合力で決まる) に z を取ることが一般的である．この座標系では，地球の回転ベクトルは図 1.2 に示すように， $\vec{\Omega} = (0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta)$ と分解されるので，コリオリ項は

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r = 2 \begin{pmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k}, \\ 0, & \Omega \cos \theta, & \Omega \sin \theta \\ u, & v, & w \end{pmatrix} = 2(u\Omega \cos \theta - v\Omega \sin \theta)\vec{i} + 2u\Omega \sin \theta \vec{j} - 2u\Omega \cos \theta \vec{k}$$

と表される．ここで，第一項は $w \ll v$ から無視でき，最後の項も重力に比べてはるかに小さいのでやはり無視することができる．結局コリオリ項は

$$f \equiv 2\Omega \sin \theta \quad (1.10)$$

とコリオリ・パラメータ (Coriolis parameter) を定義すれば，

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt_i} = \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + 2f\vec{k} \times \vec{v}_r \quad (1.11)$$

であり，成分ごとに書けば，水平二成分は

$$\frac{du_i}{dt_i} = \frac{du_r}{dt_r} - fv \quad (1.12a)$$

$$\frac{dv_i}{dt_i} = \frac{dv_r}{dt_r} + fu \quad (1.12b)$$

となる．

これで慣性系と回転系の間で加速度をどう書き換えるのかが明らかになったので，以下では特に添え字 r を付けずに，回転系を意味することとする．

結局，回転系での運動方程式は (1.12b) を (??) に代入して

$$\frac{du_r}{dt_r} - fv = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.13a)$$

$$\frac{dv_r}{dt_r} + fu = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.13b)$$

となる．

1.6 浅水方程式系

大気や海洋は幅のわりにとても薄い．例えば地球の周が 40 万 km 太平洋の幅が 10 万 km に対して，大気対流圏の厚さは約 10km，太平洋の深さは 5km でしかない．これだけ薄いと水平方向には動きやすいが，鉛直方向には動きづらい．そこで，まず興味の対象となるのは，水平運動がどう記述されるかである．

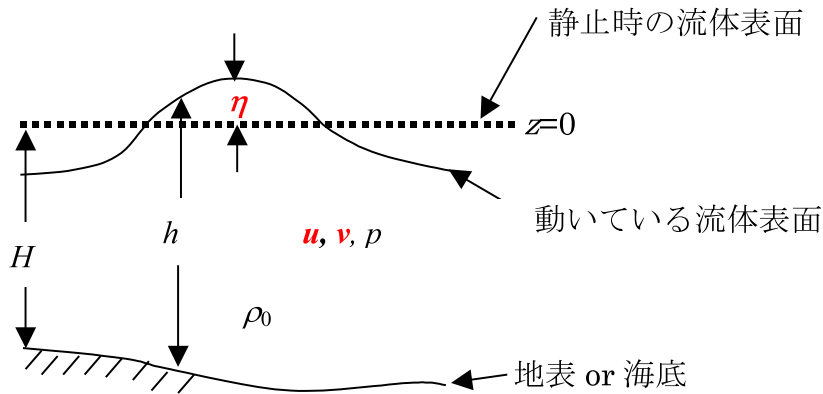


図 1.3: 流体の模式図．太字で示した， u, v, η が最終的に浅水方程式で解くべき 3 つの未知数である

この水平運動を記述できる，簡単なモデルが浅水方程式系と呼ばれるものである．浅水方程式系は，浅い密度が一定の流体の運動を記述する．この場合すぐ後で見ると，上から下まで同じように動こうとするので，速度 u, v は鉛直方向に一定とすることができる．この速度を引き起こす，圧力傾度力は流体表面の上下の移動（変位）で表現することができる．結局，図 1.3 に示すように， u, v, η を未知数とする方程式となる．

この連立方程式系⁴，二次元的な流れを仮定することで，速度 2 成分と流体の厚さ（もしくは圧力）1 変数の，3 変数，3 式で閉じるという大変なすぐれものである．通常の 3 次元空間では，速度 3 成分に加えて，密度と圧力の計 5 変数が未知数となり，閉じるためには 5 式が必要となる．方程式系の複雑さは，1 つの式が加わるにつれて感じとしては 10 倍程度難しくなるので，未知数 3 つの式と 5 つの式では，100 倍難しさが違うといえる．そこでまずは，浅水方程式で行けるとこまで行って，大規模な地球流体の力学の感覚をつかんでもらおうと思う．

1.6.1 運動方程式

静水圧の式 (1.8) から，密度一定の流体における圧力の水平勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-z}^{\eta} \rho_0 g dz = \rho_0 g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + z) = \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

となる． y 成分についても同様に得られる．したがって，水平方向の運動方程式は

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{1.14a}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{1.14b}$$

となる．

⁴方程式というと 1 つの式を，方程式系というと一つのシステム（系）の振る舞いを記述する複数の方程式を意味する．

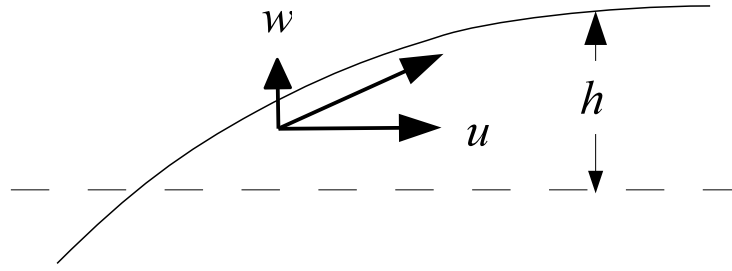


図 1.4: u が存在して、流体表面が傾いていれば、鉛直流速が w が存在する。 $w = u\partial h/\partial x$

1.6.2 連続の式*

前節で求めた浅水モデルにおける運動方程式を使うためには、水位 η を記述する式が必要である。これが連続の式である。

流体は非圧縮

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

であると仮定しよう。この仮定で音波が無視されるが、地球流体を記述する上では全く問題がない。この非圧縮の式を流体の底から表面まで積分すると

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (1.15)$$

ここで、 u, v が鉛直に一定であることを用い、 w の積分を実行して、

$$(\eta + H) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + w(\eta) - w(H) = 0 \quad (1.16)$$

となる。 $w(\eta)$ は流体粒子が表面から離れないことから、

$$w(\eta) = d\eta/dt = \partial h/\partial t + u\partial h/\partial x + v\partial h/\partial y \quad (1.17)$$

となる。一見 w は水面の上がり下がりである $\partial h/\partial t$ で表現されるかのように感じるかもしれない。しかし、水面の位置が一定（定常）であっても水面が傾いていれば、その水面に沿う運動によって、流体粒子が持つ速度成分に鉛直方向の速度成分が生ずる。この効果が、右辺第二項・第三項で表現されている。

同様に、海底での $w(H)$ は

$$w(-H) = d - H/dt = -u\partial h/\partial x - v\partial h/\partial y \quad (1.18)$$

と表される。結局、非圧縮の式は、次の連続の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\eta + H)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\eta + H)v] = 0 \quad (1.19)$$

あるいは、

$$\boxed{\frac{d\eta}{dt} + [(\eta + H)] \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0} \quad (1.20)$$

となる。

周囲から水が集まれば（収束）表面が盛り上がり、周囲に水が逃げれば（発散）表面が下がる、ことを連続の式は表現している。

1.6.3 線形化

浅水方程式系 (1.14a)(1.20) は、これで閉じた方程式系を構成するので、たとえば数値計算によって解くことができる。しかし、非線形および、静止時の水深 H の変化があるために、紙と鉛筆で扱うのは容易ではない。

そこで本書で主に利用するのは、線形かつ水深一定の場合である。すなわち、

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

1.1 から 1.6.3 への変更は、以下の 3 点である。1) 非線形の時間微分項 d/dt が線形化によって $\partial/\partial t$ になった。2) 線形化によって第三式の第 2 項の係数が h から H になった。3) 水深一定という仮定から、 $dh/dt = d(\eta + H) = d\eta/dt$ となった。なお、線形化の近似が妥当であるためには、無視された非線形項が線形項に比べて十分小さくなくてはならない。そのためには、従属変数 u, v, η の振幅が微小であればよく、これを微小振幅という。

なお、上の式では水位変化を η で示しているが、今考えている H が一定の場合には、 $h_t = \eta_t, h_x = \eta_x, h_y = \eta_y$ なので、 η を h に置き換えることができる。本書でもその表現を今後利用することがある。

1.7 3次元原始方程式

密度一定の仮定を置かないなら、3次元の方程式系が閉じた系を扱うために必要である。この場合未知数は u, v, w, p, ρ である。これまで導出した中で、利用できる方程式は、運動方程式（水平 2 成分）、静水圧の式（または鉛直方向の運動方程式）、連続の式、の 4 つであり、もう一つ方程式が必要になる。この必要な式は密度変化の式である。密度は、外部からの加熱冷却などと、流体の膨張圧縮によって変化する。前者を非断熱加熱、後者を断熱加熱という。空気は圧縮性が大きいので、断熱加熱も考慮しなくてはならないが、海洋では圧縮性が小さいので無視しても問題がない。まずは、圧縮性を無視できる方が、方程式が簡単になって現象の本質を捕まえやすいので、そちらをまず使うことにしよう。この場合、密度は、密度の出入（加熱冷却、海洋なら塩分の出入）がなければ保存する。この保存は、単純に、ラグランジェ微分がゼロということなので、

$$D\rho/Dt = J \quad (1.22)$$

と書くことができる。ここで、 J は単位体積に外部から加えられる密度の入力である。

1.8 地衡流・地衡風*

上で述べたように重力波と慣性振動は、3項からなる運動方程式 () の項を一つ無視するという仮定の下で導かれている。3項のうち 1 項を消去する上で残された選択肢は時間変化項を消去するというものである。こうすると、運動方程式はコリオリ力と圧力傾度力の釣り合いとなり、

$$\begin{cases} -fv = -g\eta_x = -p_x/\rho & (1.23a) \\ +fu = -g\eta_y = -p_y/\rho & (1.23b) \end{cases}$$

と表される。上式で表される流れを地衡流 (geostrophic currents)、または大気の場合は地衡風 (geostrophic winds)、と言う。なお上の式の一番右辺は、圧力 p を用いて書き直したものであり、この形式は 3 次元空

間における地衡流でも同じく成り立つ。また上の関係は近似式と捕らえることもでき、この立場では上式を地衡流近似 (geostrophic approximation) と呼ぶ。地衡流近似は、大規模大気・海洋の運動では良い近似として成り立っている。

演習問題 地衡流は、圧力の等値線に沿って流れる、すなわち圧力傾度力と地衡流は直交することを証明せよ。

回答 一般性を失わずに圧力傾度力の方向に、 x 軸を取ることができる。この場合、明らかに

$$\begin{aligned} -fv &= -p_x/\rho \neq 0 \\ +fu &= -p_y/\rho = 0 \end{aligned}$$

となるので、速度は y 方向成分のみ存在し、圧力傾度力と地衡流とが直交することが証明できる。

1.8.1 温度風 (thermal wind)*

成層をしている流体で地衡流平衡が成立し、かつ鉛直方向にシア (shear: 速度勾配) があると考えよう。地衡流は水平の圧力傾度力とコリオリ力がバランスするのであるから、鉛直のシアは、圧力傾度力が鉛直勾配を持つことを意味する。このことは、圧力の鉛直勾配が水平に変化するとも言える。さらに静水圧近似から圧力の鉛直勾配は密度で与えられるので、密度に水平勾配があると言える。すなわち、「地衡流の鉛直シアは密度の水平勾配に比例する」と言える。この関係を温度風もしくは温度風平衡と呼ぶ。なおこの関係は海洋においても温度”風”と呼ばれている。地衡流の場合は、海洋では地衡流、大気では地衡風と呼ばれるのにもかかわらず、上の関係を温度流と呼ぶことは無い。

温度風平衡式の式を導出しよう。地衡流の式

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}p_x, \quad fu = -\frac{1}{\rho_0}p_y,$$

と静水圧近似式

$$p_z = -\rho gh$$

から、速度の鉛直シアは次のように密度の水平勾配で表される。

$$\begin{aligned} -fv_z &= -\frac{1}{\rho_0}p_{xz} = \frac{g}{\rho_0}\rho_x, \\ fu_z &= -\frac{1}{\rho_0}p_{yz} = \frac{g}{\rho_0}\rho_y, \end{aligned}$$

この関係を温度風の関係 (thermal wind relation) と呼ぶ。この関係で規定される流れを温度風 (thermal wind)。海洋の流れは風ではないが、やはり温度風との呼称が用いられている。

1.9 拡散・粘性**

物理的な性質の基礎を議論する上では通常粘性や拡散を無視することが多い。しかし、実際にはこれらが働くのが普通である。

ある物理システムを表現する偏微分 (または常微分) 方程式、に減衰するという性質を加えたい場合は多い。その際に最も簡単なのは、減衰無しの方程式の時間変化項 $\partial u/\partial t$ を、 $\partial u/\partial t + ru$ で置き換えることである。これは $\partial u/\partial t + ru = 0$ という方程式が、 $u = u_0 \exp(rt)$ という解を持つことで示されるように、指数的に減衰する効果を表現している。このような線形項として表現される減衰効果を、運動量についてはレ

レイリー減衰 (Reyleigh damping)、熱についてはニュートン冷却 (Newtonian cooling) と呼ぶ。粘性の効果を取り入れる際に、レイリー減衰は最も簡単な方法なので、解析解を求める上ではよくつかわれる。

実際の地球流体に働く粘性はレイリー減衰の形ではなく、着目するスケールよりも小さいスケールの渦によって運動量が混ぜられることによって生じる。これを渦粘性という。また同様に拡散も渦によって生じるので、それを渦拡散という。数値計算では、渦粘性および渦拡散をほとんど必ず含める。この理由は物理的な渦粘性や渦拡散を表現するという意味もあるが、これらの効果を含めないと数値計算が不安定になる、という意味も大きい。渦粘性が正確にどう働くかは、その小さいスケールの運動を知らなくてはならない。そこで、数値計算では、その小さいスケールの運動を完全に解くのではなく、ある程度運動の特徴を表現する形で、渦粘性を考慮することが多い。もっとも簡単な渦粘性の近似としては、分子粘性と同じ空間 2 階微分の形として係数一定とすることもある。すなわち、

$$\partial u / \partial t \sim \kappa_h (u_x x + u_y y) + \kappa_v (u_z z)$$

とするのである。

1.10 定積比熱と定圧比熱

熱力学の第一法則は

$$\Delta Q = \Delta u + \Delta W \quad (1.24)$$

と表される。ここで Δu は内部エネルギー、 ΔW は仕事の量である。

仕事の量をまず考えよう。空気塊の表面積が A 、そしてその表面に直交する方向に Δr だけ伸び縮みするとしよう。すると表面に働く力は pA で、この力が距離 Δr だけ働いたので、仕事の量 $\Delta W = pA\Delta r$ である。ここで $A\Delta r$ は空気塊の体積変化を表すので、

$$\Delta W = p\Delta V \quad (1.25)$$

となり、単位質量辺りで考えるとその体積は比容 (specific volume) α で表されるので、

$$\Delta W = p\Delta\alpha \quad (1.26)$$

となる。

次に、単位質量の内部エネルギーは、温度にのみ依存することが有名なジュールの実験によって分かっている。したがって、

$$\Delta u = C_V \Delta T \quad (1.27)$$

と書くことができる。

熱力学の第一法則は

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p\Delta\alpha \quad (1.28)$$

と表現される。ここで体積変化がない場合を考えると、 $\Delta\alpha = 0$ である。したがって、右辺第一項は一定体積のまま熱量 ΔQ が与えられた場合の、温度変化 ΔT を示すので、 C_V は定積比熱と呼ばれる。

今度は圧力一定とした場合には、上式がどのように変わるかを調べよう。気体の状態方程式

$$p\alpha = RT \quad (1.29)$$

でそれぞれの量が微小変化したとすると

$$(p + \Delta p)(\alpha + \Delta\alpha) = R(T + \Delta T) \quad (1.30)$$

$$p\alpha(1 + \Delta p/p)(1 + \Delta\alpha/\alpha) = RT(1 + \Delta T/T) \quad (1.31)$$

で上式で下の式を割れば

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta p \Delta \alpha}{p \alpha}\right) = (1 + \Delta T/T) \quad (1.32)$$

と得られる．これから得られる $\Delta \alpha$ を (1.28) に代入すると，

$$\begin{aligned} \Delta Q &= C_V \Delta T + p \alpha \left(\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta p}{p} \right) \\ &= \left(C_V + \frac{p \alpha}{T} \right) \Delta T - p \frac{\Delta p}{p} \alpha \\ &= C_p \Delta T - \alpha \Delta p \end{aligned} \quad (1.33)$$

が得られる．ここで $C_p \equiv C_v + R$ である．圧力変化がない場合を考えると， $\Delta p = 0$ である．したがって，右辺第一項は一定圧力の下で熱量 ΔQ が与えられた場合の，温度変化 ΔT を示すので， C_p は定積比熱と呼ばれる．

1.11 温位

温位 (potential temperature) は次式で与えられる．

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_p} \quad (1.34)$$

ここで R_d は乾燥気体の気体定数で

$$pV = mR_dT \quad \langle - \rangle \quad p = \rho R_dT \quad (1.35)$$

である．ある温度と圧力 (T, p) の乾燥気体があり，それが微量 $\Delta T, \Delta p$ だけ変化したとしよう．この際温位は

$$\theta(T + \Delta T, p + \Delta p) = (T + \Delta T) \left(\frac{p_0}{p + \Delta p} \right)^{R_d/C_p} \quad (1.36)$$

$$= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_p} \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right)^{-R_d/C_p} \quad (1.37)$$

である．ここで，微量 δ について一般に， $(1 + \delta)^a \sim 1 + a\delta$ と近似できることから，上式は

$$\theta(T + \Delta T, p + \Delta p) = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_p} \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \left(1 - \frac{\Delta p}{p} \frac{R_d}{C_p} \right) \quad (1.38)$$

$$= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_p} \left(1 + \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta p}{p} \frac{R_d}{C_p} - \frac{\Delta T}{T} \frac{\Delta p}{p} \frac{R_d}{C_p} \right) \quad (1.39)$$

$$= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_p} \left(1 + \frac{1}{TC_p} [C_p \Delta T - \alpha \Delta p] \right) \quad (1.40)$$

となる．ここで最後のキャンセルは微量どうしの掛け算が小さいことによる．また， \square カッコ内は定圧比熱の式より，断熱であれば ($\Delta Q = 0$) ゼロとなる．したがって，

$$\theta(T + \Delta T, p + \Delta p) = \theta(T, p), \quad (1.41)$$

すなわち断熱であれば，温位が保存することが示された．

1.12 浮力振動数

通常 N で表される浮力振動数 (buoyancy frequency) は, 成層の強さを記述する基本的なパラメータである.

1.13 演習問題

重力波 問 1 . 非回転の線形浅水方程式系,

$$u_t = -g\eta_x, v_t = -g\eta_y, \eta_t = -H(u_x + v_y), \quad (1.42)$$

が波動方程式に帰着し, その位相速度が \sqrt{gH} であることを示せ. この波動は非回転重力波 (あるいは単に重力波 (gravity wave) と呼ばれる. ただし H は一定とする.

慣性振動 問 2 . 線形浅水方程式系は運動 ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$) が一様なら,

$$u_t - fv = 0, v_t + fu = 0 \quad (1.43)$$

に帰着する. この方程式系は振動を記述することを示し, その角振動数を示せ. この運動は慣性振動 (inertia oscillation) と呼ばれる.

問 3 . 運動方程式に地衡流近似が成り立つと仮定した場合を, 惑星地衡流近似と呼ぶ. 惑星地衡流近似に, さらに一定水深を仮定し, 連続の式が線形化できるとすれば, 支配方程式は次の通りである.

$$-fv = -g\eta_x, fu = -g\eta_y, \eta_t = -H(u_x + v_y), \quad (1.44)$$

ここで, $f = f_0 + \beta y$ という β 面近似が使えるとして, 波動の分散関係 (角周波数と波数との関係) を求めよ. この波は長波の極限のロスビー波である. 一般のロスビー波については, 来週学ぶ.

第2章 浅水波動

一般に波動は、物質が移動せずに遠方に情報を伝えるので重要である。この章では、コリオリ・パラメーターが f がゼロの場合に生ずる重力波、コリオリ・パラメーターが一定の場合に生じ空間スケールが大きい場合に生ずる慣性振動およびより一般的な慣性重力波、岸に沿って伝播するケルビン波について説明する。なお他の章に回す浅水方程式に生ずる重要な波としては、コリオリ・パラメーターが緯度の関数であるために生ずるロスビー波、赤道ロスビー波、赤道ケルビン波、地形性ロスビー波がある。

2.1 重力波*

基礎となる方程式系は、一様水深の線形浅水方程式である。参考のために再掲すると、

$$u_t - fv = -gh_x \quad (2.1)$$

$$v_t + fu = -gh_y \quad (2.2)$$

$$h_t + H(u_x + v_y) = 0 \quad (2.3)$$

である。

純粋な重力波は、地球回転の効果を無視する浅水方程式の解として得られる。この場合運動方程式は、

$$u_t = -gh_x \quad (2.4)$$

$$v_t = -gh_y \quad (2.5)$$

である。これら2式と連続の式から容易に h のみの式

$$h_{tt} - gH(h_{xx} + h_{yy}) = 0 \quad (2.6)$$

を得ることができる。この方程式は2次元波動方程式に他ならない。一般に波動方程式は、

$$h_{tt} - c^2 \Delta h = 0 \quad (2.7)$$

と表現され、 c が伝播速度である。ここで Δ はラプラシアンである。したがって、重力波の伝播速度は

$$c = \sqrt{gH} \quad (2.8)$$

と一定である。この重力波が実際に働くのは津波である。津波では、浅水方程式の前提である水平運動スケールが鉛直運動スケールよりも一桁以上大きいという前提と、2節後で見えるように重力波が成り立つためには現象の時間スケールが一日よりも短いという条件が満たされるのである。

2.2 慣性振動*

浅水方程式で、現象の空間スケールが大きく、空間微分を無視できるとしよう。この場合、運動方程式は

$$u_t - fv = 0, v_t + fu = 0 \quad (2.9)$$

となる。また、連続の式は単に $h_t = 0$ となるので、考慮する必要はない。 u について解けば

$$u_{tt} = fv_t = -f^2u \quad (2.10)$$

という、角周波数が f の振動方程式が得られる。これが慣性振動(*inertia oscillation*)である。

f の定義が $f = 2\Omega \sin\theta = 2(2\pi/(24 \times 60 \times 60)) \sin\theta$ であるから、振動の周期 T は $f = 2\Omega \sin\theta = 2(2\pi/(24 \times 60 \times 60)) \sin\theta$ で与えられ、極では半日であり他の緯度ではそれを $\sin(\theta)$ で割ったものとなる。例えば緯度 45 度では 0.7 日、30 度では 1 日が慣性振動の周期である。

u と v の関係を導くために、

$$u = u_0 \sin(ft) \quad (2.11)$$

と置くと、

$$v = u_0 \cos(ft) \quad (2.12)$$

が得られるので、 u と v は 90 度位相が異なっている。これは流体の回転を示している。回転といっても運動は空間的に一様なので、低気圧などとは異なっていることに注意しよう。

回転の向きを速度を積分して位置を得ると、定数部分は無視して

$$x = -(1/u_0) \cos(ft), y = +(1/u_0) \sin(ft) \quad (2.13)$$

となる。この式から位相が $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ での位置を考えると、北半球では図?? に示すように、時計回りに回転する。これは地球の回転と逆である。

ここで述べた理想的な慣性振動は伝播はしないので、厳密に言えば波動ではない。しかし、後の節で示すように波動の類縁として理解するべきである。

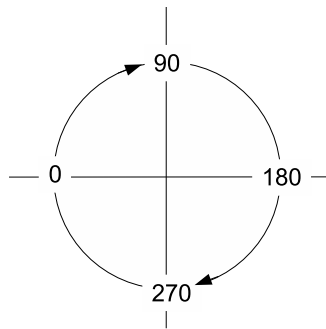


図 2.1: 慣性振動の回転方向を 2.13 での、位相が $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ における位置。

2.3 慣性重力波**

前2節で示した重力波と慣性振動は，線形浅水方程式に強い近似を用いて導いている．そういった強い近似を用いずに，線形浅水方程式の波動解を求めると得られるのが，慣性重力波(*inertia gravity wave*)である．慣性振動を導出するために，波動解 $(u, v, h)(x, y, t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})e^{i(kx+ly-\omega t)}$ を仮定しよう．ここで， k, l は x 方向・ y 方向の波数である．波動解を仮定した線形浅水方程式

$$\begin{aligned} -i\omega\tilde{u} - f\tilde{v} + gik\tilde{h} &= 0 \\ -i\omega\tilde{v} + f\tilde{u} + gil\tilde{h} &= 0 \\ -i\omega\tilde{h} + H(ik\tilde{u} + il\tilde{v}) &= 0 \end{aligned}$$

を，行列で書き直すと

$$\begin{pmatrix} igk & -i\omega & -f \\ igl & f & -i\omega \\ -i\omega & ikH & ilH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

である．この式が解を持つためには，行列式がゼロ，すなわち

$$i\omega^3 + klfghH - kllhgH - i\omega k^2 gH - i\omega l^2 gH - i\omega f^2 = 0$$

である．これが成り立つには，つぎのどちらか

$$\omega = 0 \quad (2.15a)$$

$$\omega^2 - f^2 - gH(k^2 + l^2) = 0 \quad (2.15b)$$

が成り立てばよい．一般にこのような(角)周波数と波数との関係を，分散関係式(*dispersion relation*)と呼び，波動の性質の議論の基礎になるものである．一つの解である $\omega = 0$ は定常であるので，明らかに地衡流である．

もう一つの解である(2.15b)が，慣性重力波を表している．ここでは，分散関係が次元量で示されているが，あとで述べる方法で無次元化すると，

$$\omega^{*2} - 1 - (k^{*2} + l^{*2}) = 0 \quad (2.16)$$

ここで*がついているのは，無次元量であることを意味する．となる．全波数 $K^{*2} = k^{*2} + l^{*2}$ を使って，この無次元化された分散関係を示すと図2.2となる．慣性重力波の分散関係を，非回転重力波および慣性振動の分散関係と比較してみよう．図2.2から明らかのように，慣性振動とは慣性重力波の長波の極限であり，一方重力波は短波の極限に相当する．

2.4 沿岸ケルビン波*

慣性振動が生ずるのは，コリオリ力によって流体運動が(回転座標系で)曲げられるためである．しかし，海洋では側面境界すなわち陸があるので，曲げられた先に陸がある場合には，運動を境界がブロックすることになり，慣性振動が生じることではできなくなる．この場合には，側面境界の効果を陽に考えることが必要である．以下で見るようにこの場合には，側面境界に沿う波が可能であり，この波をケルビン波(Kelvin wave)という．

支配方程式は，これまでと同じ，線形浅水方程式である

$$u_t - fv = -h_x \quad (2.17)$$

$$v_t + fu = -h_y \quad (2.18)$$

$$h_t + H(u_x + v_y) = 0 \quad (2.19)$$

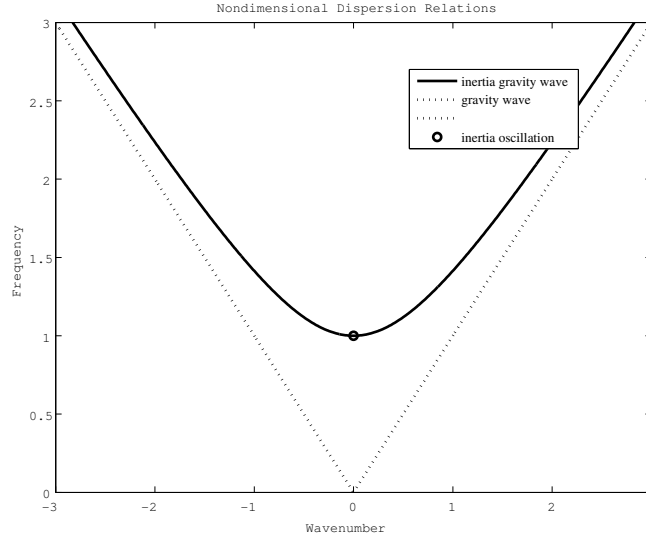


図 2.2: 慣性重力波, 重力波, 慣性振動の, 無次元化された分散関係

ここで, $y = 0$ に壁があるとしよう. この場合, x 方向には運動がしやすいけれど, y 方向には運動がしづらいことが予想される. そこで, y 方向には運動しない, すなわち $v = 0$ を仮定してみよう. この仮定の下で解が存在すれば, この仮定は妥当だと言える. すると,

$$u_t = -h_x \quad (2.20)$$

$$+fu = -h_y \quad (2.21)$$

$$h_t + Hu_x = 0 \quad (2.22)$$

この場合, (2.21) は, x 方向に地衡流が成立していることを意味しており, これを片地衡流近似 (semi-geostrophic approximation) という.

ここで, u と h の時間微分の式から, どちらかの変数を消すことは容易で, そうすると

$$h_{tt} - gHh_{xx} = 0 \quad (2.23)$$

と一次元の波動方程式を得る. 伝播速度は $\pm\sqrt{gH}$ と, 非回転重力波と同じ速度である. ただし, 正・負両方向の伝播がどちらも物理的に妥当な解であるとは限らない. x 方向には波動伝播することが分かったが, y 方向には境界があるために波動伝播はしないことが予想される. そこで, (x, t) に関する波動解を仮定しよう.

$$h(x, y, t) = \tilde{h}(y) \exp(ik(x \mp \sqrt{gH}t))$$

(2.21) を (2.22) に代入すると,

$$h_t = -Hu_x = \frac{H}{f}(gh_y)_x$$

これに上の波動解を導入すると

$$\tilde{h}_y = \mp \frac{f}{\sqrt{gH}} \tilde{h}$$

となる. この式は, y 方向に減衰 (負号) または成長 (正号) する解である. もし成長すると, 岸から離れた場所で非常に大きな振幅を持つことになり, 現実的ではない. したがって, $y \rightarrow \infty$ で振幅がゼロになることが物理的に妥当であるために必要であり, それを満たすのは減衰解である. この減衰解は, 波動解の \exp の中における負号, すなわち正方向の伝播に対応している. したがって, 解は

$$h(x, y, t) = \tilde{h}_0 \exp\left(-\frac{f}{\sqrt{gH}}y\right) \exp\left(ik(x - \sqrt{gH}t)\right) \quad (2.24)$$

ここで \tilde{h}_0 は任意の複素定数で、絶対値が岸における振幅を、位相が $x = t = 0$ における h の位相を表している。 u についても、(2.21) から解は容易に得られる。片地衡流の関係にあり、 h は沖に向かって単調減少するので、 h が正の場所では u も必ず正となる。

2.5 浅水方程式の無次元化**

一般に無次元化は、方程式が本来持っている性質がより明確になるので、物理的な見通しをつけるために広く使われる方法である。例えばここで考えている中緯度と後に述べる赤道の力学の比較でも有意義である。

無次元化するには、まず独立変数と従属変数それぞれの規準とする大きさ決める。すなわち時間・長さ・速度・表面変位のスケールを与える。時間スケールはコリオリ・パラメータの逆数とする ($1/f$)。速度スケールは重力波の伝播速度 (\sqrt{gH}) に選ぶ。水位スケールは、水深 H とする。長さスケールはしたがって、速度スケールに時間スケールをかけて、

$$R_o = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad (2.25)$$

となる。この長さスケールは、ロスビー変形半径 (*Rossby deformation radius*) と呼ばれ、非常に重要な量である。一般に現象の長さスケールが、ロスビー変形半径よりも長ければコリオリ力が重要となり、短ければコリオリ力を無視することができる。

ロスビーの変形半径は緯度 45° における 1 層海洋 (外部モード) では (すなわち $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$, $H=5000$) 約 20,000 km ~ 緯度 20° 、1.5 層 (内部モード) (すなわち $g=(3/1000) 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $H=300$) で約 30 km である。(Todo: 1.5 層の説明を後に、大気については?)

時間・長さ・速度・表面変位スケール (T, L, U, H) を用いて、無次元量を * をつけて示す。すなわち $(x, y) = (x, y)R_o$, $(u, v) = (u^*, v^*)\sqrt{gH}$, $t = t^*/f$, $h = h^*H$ である。これらの関係を浅水方程式系の次元変数に代入すると、次の無次元方程式系が得られる。

$$u_{t^*}^* - v^* = -h_{x^*}^* \quad (2.26)$$

$$v_{t^*}^* + u^* = -h_{y^*}^* \quad (2.27)$$

$$h_{t^*}^* + u_{x^*}^* + v_{y^*}^* = 0 \quad (2.28)$$

2.6 浅水方程式から v のみの式の導出***

慣性振動の式を解く際には、何気なく波動解を導入した。なぜかというところだと簡単に分散関係を求めることができるからである。しかし非回転重力波や慣性振動では近似を使ってはいるものの、波動解を仮定せずに、1 変数 1 式まで帰着させることができた。では近似なしの浅水方程式は 1 変数 1 式に帰着させることができないのか、ということこれはできるのである。ポイントは v の式にすることである。 h, u の式では 1 変数 1 式には帰着できない。参考まで浅水方程式から確かに v だけの式が得られることを示そう。支配方程式は

$$u_t - fv = -gh_x \quad (2.29)$$

$$v_t + fu = -gh_y \quad (2.30)$$

$$h_t + H(u_x + v_y) = 0 \quad (2.31)$$

とする。

まず、 h を消そう。 $\partial_y(2.29) - \partial_x(2.30)$ から

$$u_{ty} - fu_x - \beta v - fv_y - v_{tx} = 0 \quad (2.32)$$

$\partial t(2.29) - \partial x(2.31)_g$ から

$$u_{tt} - gHu_{xx} - fv_t - gHv_{xy} = 0 \quad (2.33)$$

$\partial t(2.30) - \partial x(2.31)_g$ から

$$fu_t - gHu_{xy} + v_{tt} - gHv_{yy} = 0 \quad (2.34)$$

となる。

次に (2.32)~(2.34) から v のみの式を作ろう。 $-\partial x(2.32)gH + f(2.33) - \partial t(2.34)$ から、

$$\begin{aligned} & -gHu_{txy} + gHfu_{xx} + gH\beta v_x + gHfv_{xy} + gHv_{txx} \\ & + fu_{tt} - gHfu_{xx} - f^2v_t - gHfv_{xy} \\ & - fu_{tt} + gHu_{txy} - v_{ttt} + gHv_{tyy} = 0 \end{aligned}$$

u を含む項は全て打ち消しあって消えて、残った項を整理すると、

$$-v_{ttt} + (gH\Delta - f^2)v_t + gH\beta v_x = 0 \quad (2.35)$$

という v のみの式が得られる。

この導出では、 β の微分がゼロであるという条件を用いていないので、(2.35) 式は β が緯度変化する場合でも成り立つ。なお、(2.35) で $\beta=0$ かつ $\partial t=0$ (定常) とすると全ての項がゼロになってしまう。すなわち、 f 平面上での定常状態である地衡流は (2.35) には含まれておらず、別に考えなくてはならない。

2.7 演習問題

問1. 簡単のために重力加速度を 10 m s^{-1} 、水深を 4000 m とする場合、重力波の速度を答えよ。またチリ地震の際には、日本にも 1 万 km 太平洋を横断するのに必要な時間を求めよ。

問2. 無次元化により、無次元線形浅水方程式 2.26 が得られることを示せ。

2.8 matlab スクリプト

2.8.1 慣性重力波などの無次元分散関係

% 慣性重力波，重力波，慣性振動の分散関係を描画する matlab script

```
K=[-3:0.01:3];
omega=sqrt(1+K.^2);
plot(K,omega,'k',K,K,'k:',K,-K,'k:',0,1,'ok','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',10)
axis([-3 3 0 3]);
xlabel('Wavenumber');
ylabel('Frequency')
h=legend('inertia gravity wave','gravity wave',' ','inertia oscillation')
set(h,'position',[0.3 0.7 0.8 0.15],'fontname','times')
title('Nondimensional Dispersion Relations')
print -deps -tiff -r600 D:\MyDoc\99_0X_GFD\tex_book\shallow_waves\inertia_grav_disp.eps
```

第3章 渦位の保存

保存則は物理の理解に大きな役割を果たしている。例えば、質量の保存およびエネルギーの保存が、いかに重要かは皆さんもよく理解しているだろう。地球流体でももちろん、質量・エネルギーは保存するが、より重要なのは渦位(*potential vorticity*)の保存だ。そのために、地球流体力学は渦位の学問だと言われることもある。

渦位保存とは、角運動量の保存に他ならない。そこで、この章では角運動量保存から渦位保存の概念を導き出し、さらに前節で導出した浅水方程式でも渦位保存が成り立つことを示そう。浅水(すなわち1層)方程式での渦位は、

$$\frac{f + v_y - u_x}{h} \quad (3.1)$$

表すことができる。

3.1 角運動量の保存からの渦位保存*

剛体が固定軸の回りを回転する場合の固定軸方向の角運動量 (angular momentum) は

$$I\omega$$

で与えられる。ここで ω は角速度 (angular velocity) であり、

I は慣性モーメント (moment of inertia) または慣性能率と呼ばれ、剛体が質点から構成させる場合には

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

で、連続体として扱うのであれば、

$$I = \int \rho r^2 dv$$

で与えられる。ここで、 r は固定軸からの距離、 m_i は質点の質量、 ρ は密度、 dv は体積積分を示す。外力が作用しない場合は、角運動量は保存する。

3.2 剛体回転する円柱の角運動量保存*

密度 ρ 半径 R 高さ H の円柱があって、が一定の角速度 ω で回転しているとしよう。ではこの水柱が伸展 (stretching) もしくは収縮 (squeezing) されて高さが H' になった場合には、角速度はどう変化するだろうか？

まず 角運動量保存 から、

$$\int \rho r^2 \omega dv = \int \rho r'^2 \omega' dv'$$

が成立する．上式の両辺を ρ で割って体積積分を円筒座標系で表すと，

$$\int_0^R \int_0^H r^2 \omega \, dh \, r \, dr = \int_0^{R'} \int_0^{H'} r^2 \omega' \, dh \, r \, dr$$

となり，この積分を実行すると

$$\frac{1}{4} R^4 \omega H = \frac{1}{4} R'^4 \omega' H'$$

が得られる．ここで，全体積は変わらない（密度一定 = 非圧縮）ので， $\pi R^2 H = \pi R'^2 H'$ より，半径は $R' = R \sqrt{H/H'}$ であるから，

$$\frac{\omega}{H} = \frac{\omega'}{H'} = \text{const}$$

となる．すなわち，角運動量保存則から，円柱が引きのばされるとその長さに比例して角速度が増加する．この ω/H を渦位 (potential vorticity) と呼ぶ．

上で考えた剛体回転する円柱の角運動量保存から，非粘性の浅水方程式についても角運動量の保存を考えると， ω/h が保存されるであろうと推測される．ここで， h は水の厚さでよさそうだけれど， ω はどのように表現すれば良いだろうか？流体が地球上の観測者に対して回転する成分は $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ となる．しかし，角運動量保存則とは，地球上の観測者に対する角運動量が保存されるのではなく，静止座標に対する角運動量が保存されることを意味する．したがって，地球が回転している効果も含めて，角運動量保存を考えなくてはならない．その効果も含めた回転成分は $f + \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ となり，これを渦度 (vorticity) または絶対渦度 (absolute vorticity) と呼ぶ．また f は周辺渦度 (ambient vorticity)， $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は相対渦度 (relative vorticity) と呼ぶ．

結局，角運動量の保存から層モデルの流体で保存されるべき量は，渦度を層の厚さで割った $(f + \partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/h$ である．この量を渦位 (potential vorticity) と呼ぶ．ここで，相対渦度 ζ が $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ であることを用いれば，渦位は

$$\frac{f + \zeta}{h}$$

とも書ける．渦位は地球惑星流体の力学において中心的な役割を果たす．渦位が浅水方程式系で保存することは，次節のように確かめることができる．

なおここでは1層流体について考察したが，後に出てくる多層モデルでも，同様の考察によって各々の層の渦位

$$\frac{f + \zeta_n}{h_n}$$

と書けることを容易に示すことができる．ここで添え字 n は n 層目での量であることを意味する．

角運動量の保存や渦位の保存は，よくフィギュアスケートのスピンのたとえられる．フィギュアスケートでは氷との接触で角運動量を変化させる．でも足のケリにはスピードに限界があるから，速いスピンをしようとするとき，欲しい回転に比べると遅い足のキックが，速い回転につながるようになってはならない．そこで，スピンでは，最初は手を広げておいて回転を始める．手を広げておくと，慣性モーメントが大きいため比較的遅い角速度でも，大きな角運動量を獲得することができる．この場合角速度は遅くていいので，足のキックがそれなりのスピードでも大丈夫．手を広げた状態で十分氷との接触から角運動量を獲得したら，そこでやおら手を折り畳む．これで体の質量が回転軸の近くに集中するので，角速度の保存から回転速度が上がって，ぐるぐる回って見栄えがする，というわけだ．

3.3 層モデルにおける渦位保存の証明***

浅水方程式を含む一般的な層モデルにおいて，ある層の支配方程式は

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\frac{Dh}{Dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.4)$$

である．ここで h は層の厚さである．この 1・2 式目の圧力がどのように層の厚さと関係して与えられるかは浅水方程式・多層方程式で違いが生ずるけれど，渦位保存はその相違に立ち入らずに示すことができる．

渦位が保存することを証明するには， $(f + \partial v / \partial x - \partial u / \partial y) / h$ のラグランジェ微分がゼロとなることを示せば良いので，

$$\frac{D}{Dt} \frac{f + v_x - u_y}{h} = \frac{1}{h} \frac{D}{Dt} (f + v_x - u_y) + (f + v_x - u_y) \frac{D}{Dt} \frac{1}{h} \quad (3.5)$$

の右辺の第一項と第二項が打ち消しあうことを示そう．

まず，(3.5) の右辺第 1 項は，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \frac{D}{Dt} (f + v_x - u_y) \\ &= \frac{1}{h} \left[v\beta + \frac{D}{Dt} (v_x - u_y) \right] \end{aligned}$$

上の運動方程式を使えるように

$$= \frac{1}{h} \left[v\beta + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{Dv}{Dt} - u_x v_x - v_x v_y \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{Du}{Dt} - u_y u_x - v_y u_y \right) \right]$$

と形を整えて，運動方程式を代入する．

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \left[v\beta + \frac{\partial}{\partial x} \left(-fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(+fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - u_x v_x - v_x v_y + u_x u_y + u_y v_y \right] \\ &= \frac{1}{h} [v\beta - v\beta - f(u_x + v_y) - (v_x - u_y)(u_x + v_y)] \\ &= -\frac{f + v_x - u_y}{h} (u_x + v_y) \end{aligned}$$

一方，(3.5) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} (f + v_x - u_y) \frac{D}{Dt} \frac{1}{h} &= (f + v_x - u_y) \frac{-1}{h^2} \frac{Dh}{Dt} \\ &= (f + v_x - u_y) \frac{1}{h^2} h (u_x + v_y) \\ &= \frac{f + v_x - u_y}{h} (u_x + v_y) \end{aligned}$$

となる．ここで 2 行目を導くのに連続の式を用いている．結局，(3.5) の第 1・2 項の和は打ち消しあってゼロとなるので，

$$\frac{d}{dt} \frac{f + v_x - u_y}{h} = 0 \quad (3.6)$$

が常に成り立ち，渦位保存が証明された．

第4章 ロスビー波

ロスビー波 (Rossby wave) は、地球が回転し、かつ球面であるために生ずる波である。このため惑星波 (Planetary wave) とも呼ばれる。

4.1 渦位保存による波*

渦位が保存すると、西向きの波が生じることを説明しよう。まず、流体の厚さは一定と仮定する ($h = \text{const}$)。一層流体の場合には、これはいち水深 H が一定で、表面変位 η が小さいという条件に相当する。この場合渦位の保存は、

$$f + v_y - u_x = \text{const}$$

となる。従って、流体が南に移動すれば f が減少するので、相対渦度が増加しなくてはならず、逆に流体が北に移動すると f が増加するので相対渦度は減少する。このことが、図 4.1 に示すように、西へ伝播する波を形成する原因となる。

4.2 長波ロスビー波*

この節では、 β 面上の浅水方程式に近似を行うことで、ロスビー波の解が得られることを示そう。

浅水方程式系で運動方程式から時間変化項を落とすが、連続の式には時間変化項を残す、という近似を用いよう。 f 面上の地衡流であれば、非発散になるので、連続の式も $h_t = 0$ になるだけだが、 β 面上では地衡流であっても発散成分を持つので、水位変動が生じ、それがまた地衡流の関係を通じて、流速を変えるのである。すなわちこの場合の支配方程式は

$$-fv = -g\eta_x \quad (4.1)$$

$$+fu = -g\eta_y \quad (4.2)$$

$$\eta_t + H(u_x + v_y) = 0 \quad (4.3)$$

である。運動方程式は地衡流の式となる。なお、地衡流でコリオリ・パラメータが緯度によって変化することを明記する、惑星地衡流 (planetary geostrophy) という表現も使われる。運動方程式をクロス微分して、連続の式に代入し、地衡流の関係を用いると

$$\eta_t - gH\beta\eta_x/f^2 = 0 \quad (4.4)$$

という η のみの式が得られる。これから波動解 $\sim \exp(-i(kx - \omega t))$ を仮定して分散関係を求めると、

$$\omega = -\frac{gH\beta k}{f^2} \quad (4.5)$$

である。

これは前節で求めた分散関係で波長がロスビー変形半径よりも十分大きい、とした場合に一致するので、長波ロスビー波 (long Rossby wave) を表現している。長波ロスビー波は、一般に海洋で重要である。

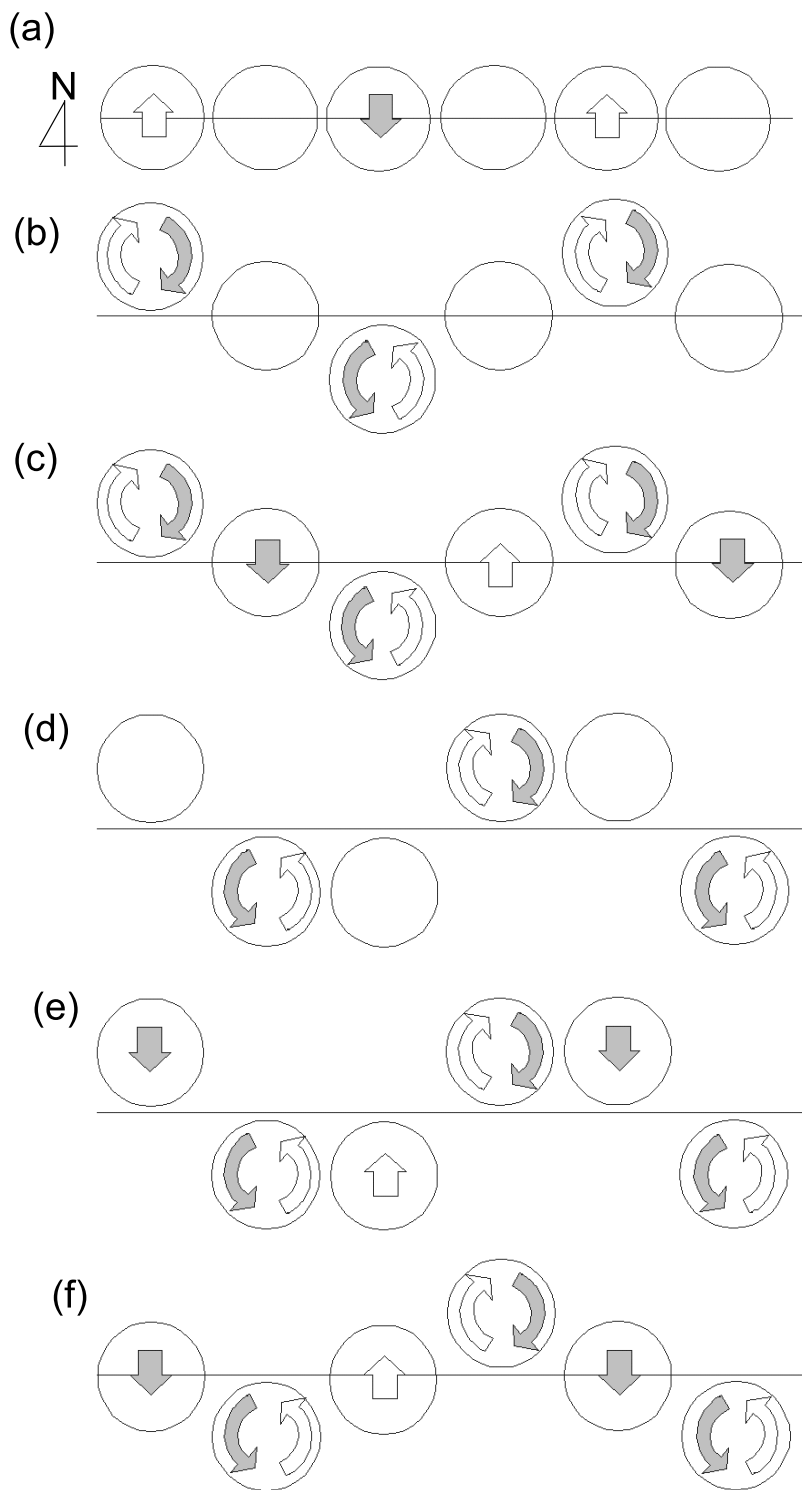


図 4.1: 渦位の保存により、西に向かう波が生じることを説明する模式図．この波はロスビー波と呼ばれる．
 (a) なんらかの原因で南北方向に移動を開始．(b) 北(南)に移動した水柱は、 f が増加(減少)するので、
 渦位保存から相対渦度が減少(増加)しなくてはならず、時計回り(反時計回り)に回転する．(c) 移動した
 水柱の循環が、周囲に流れを作り出す．南に移動した水柱の西側に南向きの流れ、北に移動した水柱の西側
 に北向きの流れができる．(d) 新たに移動した水柱が、(b)と同様に回転する．(e) 新たに移動した水柱の回
 転によって、(c)と同様に前に移動していた水柱に南北方向の流れが生ずる．(f) 前に移動していた水柱が南
 北方向に移動する．この状態は (b)と比較すると $1/4$ 波長西へ進んだ状態である．

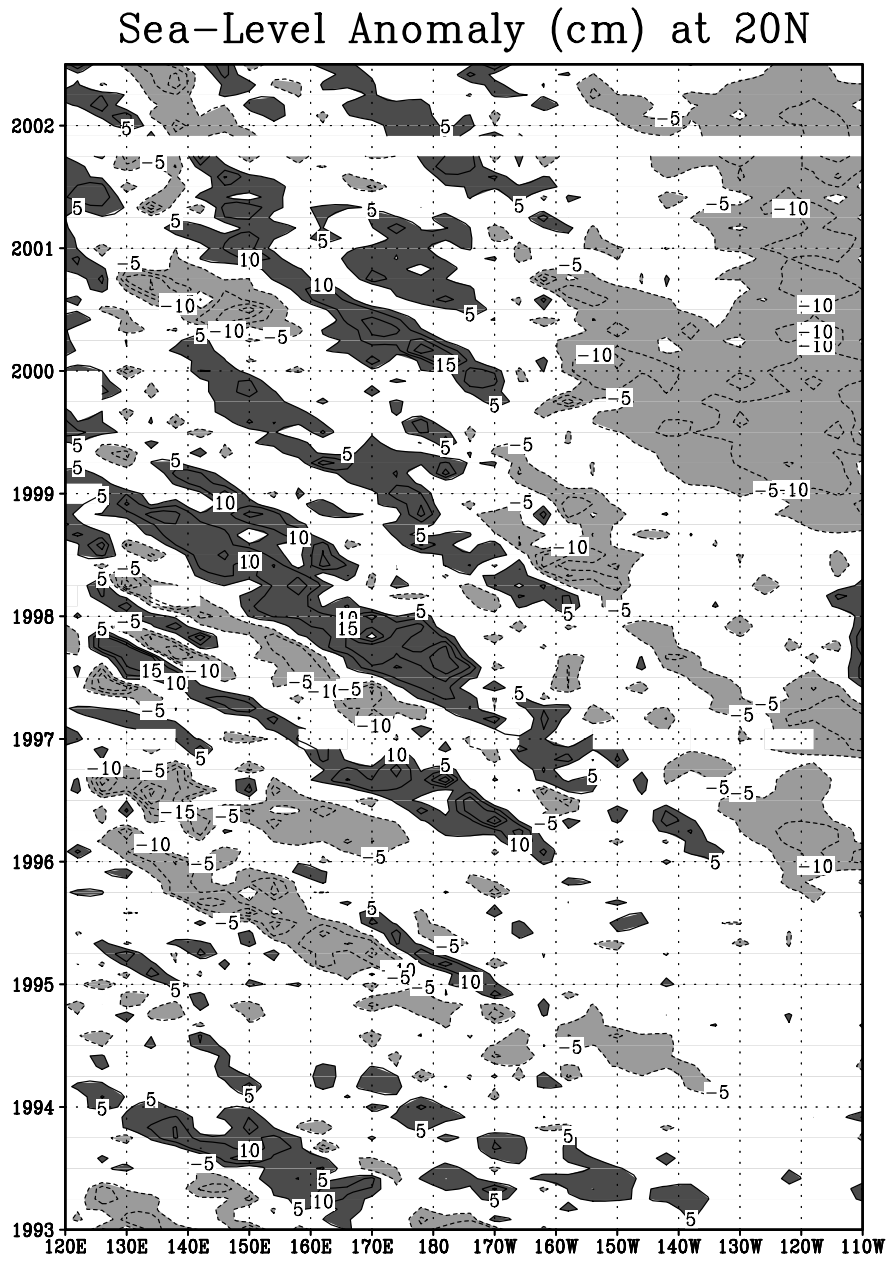


図 4.2: Topex/Poseidon 衛星に搭載された高度計で観測された太平洋 20°N における，表面変位の平年値からのずれ。

4.3 短波ロスビー波*

短波ロスビー波を導出するには、非発散 $u_x + v_y = 0$ を仮定する。すると連続の式から $\eta_t = 0$ となる。したがって変動成分に注目することとすると、圧力はゼロとしてよく、運動方程式は

$$\begin{aligned} u_t - fv &= 0 \\ v_t + fu &= 0 \end{aligned}$$

両辺クロス微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x - u_y) + \overbrace{f(u_x + v_y)} + \beta v = 0$$

となる。1変数に帰着させるには、非発散二次元流であるので必ず流線関数であらわすことができるので、それを使えばよい。流線関数 ψ を導入すると、

$$v \equiv \psi_x, u \equiv -\psi_y$$

であるから上式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \beta\psi_x = 0 \quad (4.6)$$

となる。さらに見通しをよくするために、この式で $\psi \sim \tilde{\psi} \exp(i(kx + ly - \omega t))$ と平面波解を仮定しよう。すると

$$-i\omega(-k^2 - l^2)\tilde{\psi} + \beta ik\tilde{\psi} = 0 \quad (4.7)$$

したがって、周波数と波数の関係である分散関係は、短波ロスビー波について

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2} \quad (4.8)$$

となる。周波数と波数とが比例関係にないため、短波ロスビー波は分散性を持つ波である。

4.4 一般流の効果を含めた短波ロスビー波*

短波ロスビー波は、大気では大規模場に重要な役割を果たすと考えられている。この場合、偏西風ジェットに代表される一般流の効果を見逃すことができない。そこで、ここでは一般流の効果を含めて短波ロスビー波を導出しよう。なおこの導出は上の一般流のない短波ロスビー波の導出を含んでいる。一般流は、定常かつ一様な西風（東向き流れ）とする。また、大気のロスビー波は1層モデルで考えるよりも、ある高度を取り出して考えることが多いので、3次元空間における運動方程式について、ある高さに注目するとする。また、非発散を仮定する。この場合支配方程式は、

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x - fv &= -p_x/\rho_0 \\ v_t + Uv_x + fu &= -p_y/\rho_0 \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}$$

である。2つの運動方程式のクロス微分を取ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x - u_y) + U\frac{\partial}{\partial x}(v_x - u_y) + \overbrace{f(u_x + v_y)} + \beta v = 0$$

となる。1変数に帰着させるには、非発散二次元流であるので必ず流線関数であらわすことができるので、それを使えばよい。流線関数 ψ を導入すると、

$$v \equiv \psi_x, u \equiv -\psi_y$$

であるから上式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + U(\psi_{xx} + \psi_{yy})_x + \beta\psi_x = 0 \quad (4.9)$$

となる．さらに見通しをよくするために，この式で $\psi \sim \tilde{\psi} \exp(i(kx + ly - \omega t))$ と平面波解を仮定しよう．すると

$$-i\omega(-k^2 - l^2)\tilde{\psi} + ikU(-k^2 - l^2)\tilde{\psi} + \beta ik\tilde{\psi} = 0 \quad (4.10)$$

となる．したがって，周波数と波数の関係である分散関係は，短波ロスビー波について

$$\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \quad (4.11)$$

である．右辺第一項は，一般流の移流によって生じるドップラー・シフトを表している．

4.5 演習問題

問 2-1．東西方向には一様 $\partial/\partial x = 0$ な層モデルを仮定し，30N で地球に対して静止している流体を，赤道方向に移動させるとしよう．この移動によって生ずる (u_y) から，赤道での東西流速を求めよ．

赤道では，深度 200m 程度に東に向かう強い流れである赤道潜流が存在することが知られている．この渦位保存から生ずる東向き海流は，赤道潜流の基本的なメカニズムとして，19XX 年に提案された．

4.5.1 Rossby 波の分散関係の導出**

前節では長波および短波のロスビー波をによって，コリオリ・パラメーターが緯度によって変化するなら，西へ伝播する波が生じることが分かった．しかしそのような概念的な理解では，伝播速度など波の性質を定量的に明らかにすることはできない．そこで，ロスビー波の波の性質，つまり分散関係を導出しよう，ということになる．その導出方法としては大きくは2通りがあって，準地衡流方程式(だいたい地衡流)と呼ばれる近似方程式またはその簡略版を導いてからロスビー波の分散関係を導出する方法と，まずロスビー波を慣性振動を含む3次の分散関係式を導き，この3次の分散関係式は二つの慣性振動と一つのロスビー波を解として持つので，ここで近似を用いてロスビー波の分散関係を抽出する方法である．エレガントな前者の導出は，後の節の準地衡流方程式でまとめて議論する方が良い．そこでここでは後者の方法によってロスビー波の分散関係式を一応導出しておこう．

2.6 節で導いた v のみの式 (2.35) を再掲すると

$$-v_{ttt} + (gH\Delta - f^2)v_t + gH\beta v_x = 0 \quad (4.12)$$

であった．ここで波動解 $v = \tilde{v} e^{i(kx + ly - \omega t)}$ を仮定すると

$$-i\omega^3 + (-gH(k^2 + l^2) - f^2)(-i\omega) + ikgH\beta = 0 \quad (4.13)$$

となる．この式は， β を含む項を無視できるなら，慣性重力波の分散関係に一致する．これは ω を含む項を残すのだから， ω が大きい，すなわち短周期の近似である．一方， ω が小さいという長周期近似を用いれば， ω の3次の項は消えて， ω の一次式となるので，容易に ω について解くことができる．

$$\omega = \frac{gH\beta k}{gH(k^2 + l^2) + f^2} \quad (4.14)$$

分母分子を f^2 で割って，ロスビー数を用いると，

$$\omega = \frac{k\beta R_o^2}{1 + (k^2 + l^2)R_o^2} \quad (4.15)$$

が得られる．これがロスビー波の分散関係である．

このロスビー波の分散関係から，長波ロスビーは波長がロスビーの変形半径 R_o よりもはるかに大きい場合であり，短波ロスビーは波長がロスビーの変形半径よりもはるかに小さい場合に生じることが見て取れる．

第5章 準地衡流方程式

この章では、準地衡流方程式(*quasi-geostrophic equation*)を学ぶ。準地衡流方程式はその名の通り、大体地衡流バランスが成り立つことである。準地衡流方程式のご利益は二つある。一つは、浅水方程式の3変数3式から、ロスビー波など大規模場の力学に重要な物理過程を含めたまま、流線関数の1変数で記述される1式を導き出すことができる。こうすることでさまざまな有用な解析解を得ることができる。したがって準地衡流方程式は、大気海洋の力学を議論する上で、基礎になる方程式である。もう一つの利益は、準地衡流方程式では、ロスビー波よりも伝播速度が大きな重力波が無視されているので、数値計算を行う場合に時間ステップを重力波を含めるよりもはるかに大きく取ることができることである。大規模な現象については、すでに学んだ通り重力波の寄与が小さく、準地衡流近似は一般に妥当であると言える。準地衡流の近似はただし、コリオリ・パラメーターが小さい熱帯では成立しない。したがって、準地衡流はもっぱら中緯度で利用される。また、準地衡流は非線形効果を考慮するものの、比較的弱い非線形効果に限定されるので、強い非線性が働く場合には、準地衡流方程式では表現し得ない。ここでは1層(もしくは1.5層)の準地衡流方程式を導出する。基礎となる中緯度 β 面上の、1層原始方程式系は以下の通りである。

$$\left[r - v\Delta + \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] u - (f_0 + \beta y)v = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\tau^x}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.1)$$

$$\left[r - v\Delta + \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] v + (f_0 + \beta y)u = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\tau^y}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta + H) + \frac{\partial}{\partial x}[u(\eta + H)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(\eta + H)] = 0 \quad (5.3)$$

ここで、(5.1) (5.2)の右辺第2項(r の付いている項)は、底の摩擦を表している。この項は1.5層では小さいと考えられるが、1層の場合には有意な大きさを持つであろう。また H は静止状態の際の厚さで一定、また η は表面変位であり、全層厚 h は $h = \eta + H$ で表される。この式はただし、1または1.5層で使われる全ての項が含まれており、したがってそのまま数値計算にも利用できるが、物理の本質を見るには煩雑である。そこで、運動方程式は底摩擦および粘性を除いた

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] u - (f_0 + \beta y)v = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\tau^x}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] v + (f_0 + \beta y)u = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\tau^y}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.5)$$

を主に利用しよう。右辺第二項は、流体表面に加えられる応力による運動を表しており、大気の運動を考える場合にはこの項は不要となる。

5.1 非発散渦度方程式**

方程式系 5.4, 5.5, は、非発散であれば1式1変数に容易に帰着できる。まずは、ウォーミング・アップとしてこれをやってみよう。簡単のために、地形はなし ($H = 0$) とする。

出発方程式は、

$$\left(r - v\Delta + \frac{D}{Dt}\right)u - fv = -\frac{p_x}{\rho_0} + \frac{\tau^x}{\rho_0 H} \quad (5.6)$$

$$\left(r - v\Delta + \frac{D}{Dt}\right)v + fu = -\frac{p_y}{\rho_0} + \frac{\tau^y}{\rho_0 H} \quad (5.7)$$

である。圧力項を消去するために、クロス微分 $\partial(5.7)/\partial x - \partial(5.6)/\partial y$ を行くと、

$$\left(r - v\Delta + \frac{D}{Dt}\right)(v_x - u_y) + f(\cancel{u_x} + \cancel{v_y}) + \beta v = \frac{\text{curl}\vec{\tau}}{\rho_0 H}$$

となる。ただし、

$$\text{curl}\vec{\tau} \equiv \frac{\partial\tau^y}{\partial x} - \frac{\partial\tau^x}{\partial y} \quad (5.8)$$

と定義され、「カール・タウ」と呼ばれる。流速成分を流線関数 ($\psi, \psi_x = v, \psi_y = u$) で書き直せば、

$$\left(r - v\Delta + \frac{D}{Dt}\right)\Delta\psi + \beta\psi_x = \frac{\text{curl}\vec{\tau}}{\rho_0 H} \quad (5.9)$$

となる。この式を、非発散渦度方程式という。移流項も流線関数で書けば、

$$(r - v\Delta)\Delta\psi + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Delta\psi + f) = \frac{\text{curl}\vec{\tau}}{\rho_0 H} \quad (5.10)$$

であり、明らかに1つの未知変数に関する1式になっている。

このように簡単な式が得られるのは、非発散であるからである。非発散であれば流線関数を使えるので、流速については流線関数で表現できるし、圧力はクロス微分で消去することができる。しかし一般には、1層であっても非発散ではないし、連続成層の場合もやはり非発散ではないのでこう簡単にはいかず、中緯度の大規模場については準地衡流近似を用いて1変数1式を獲ることが一般的である。

5.2 非線形1層準地衡流方程式の導出**

準地衡流では、大体地衡流が成り立つわけだから、地衡流のバランスが他の項よりも大きい。この関係を巧妙に使うことで、1変数1式に帰着することができる。

項の大きさを決めるものは、変数と演算子の大きさであり、これらの大きさを検討しよう。まず、地衡流成分を (u_0, v_0) 、非地衡流成分を (u_1, v_1) とする ($u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1$)。地衡流成分をオーダー1とすれば、地衡流の近似が成り立つためには、地衡流以外の非地衡流成分はオーダーが1つ以上小さくなくてはならずこれをオーダー ϵ で表すことにしよう。オーダー・イプシロンとは、オーダー1の量に対して、一桁 (10-20

$$\frac{\partial}{\partial t}, u \frac{\partial}{\partial x}, v \frac{\partial}{\partial y}, \beta y \quad (5.11)$$

のオーダーが ϵ 以下であることを意味する。

以上の変数と演算子のオーダーの関係が，準地衡流近似を使う場合に必要であることを念頭においた上で，運動方程式を地衡流成分と非地衡流成分とを用いて書き直そう．すなわち，

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} \right] (u_0 + u_1) \\ & - (f_0 + \beta y)(v_0 + v_1) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau^x}{\rho_0 H} - \frac{\eta \tau^x}{\rho_0 H^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} \right] (v_0 + v_1) \quad (5.13)$$

$$+ (f_0 + \beta y)(u_0 + u_1) = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau^y}{\rho_0 H} - \frac{\eta \tau^y}{\rho_0 H^2} \quad (5.14)$$

である．ここで $\eta \ll H$ を仮定して¹， $1/(H + \eta) \sim 1/H - \eta/H^2$ を用いている．これらの式で項がオーダー 1 であるのは，変数と演算子ともにオーダー 1 の地衡流成分のみである．すなわち，オーダー 1 の式は，

$$-f_0 v_0 = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad +f_0 u_0 = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (5.15)$$

である．これは明らかに非発散 $u_{0x} + v_{0y} = x_0$ を満たす．非発散であれば，流線関数 ψ を導入できて，

$$v_0 = \psi_x, u_0 = -\psi_y, \psi = \eta \frac{g}{f_0} \quad (5.16)$$

となる．

次に (5.12)(5.13) 式で，オーダー ϵ の項を集めた式を考えよう．この場合，各項はオーダー 1 の変数とオーダー ϵ の演算子の掛け算か，あるいは逆にオーダー ϵ の変数とオーダー 1 の演算子の掛け算になる．オーダー ϵ の変数とオーダー ϵ の演算子との掛け算からなる項は， ϵ^2 になるので無視する．また η と H も，やはり大きさはオーダー ϵ 異なると仮定する．するとオーダー ϵ の式は，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right] u_0 - f_0 v_1 - \beta y v_0 = \frac{\tau^x}{\rho_0 H} \quad (5.17)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right] v_0 + f_0 u_1 + \beta y u_0 = \frac{\tau^y}{\rho_0 H} \quad (5.18)$$

である．ここで，オーダー ϵ の項はそれぞれの式に各 1 項しか含まれていないことに注意しておこう．

一方，連続の式 (5.1) を， (u_0, u_1, v_0, v_1) を用いて書き直せば，

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} (H + \eta) + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} (H + \eta) \\ & + (H + \eta) \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

である． (u_0, v_0) が非発散であることと，変数の大きさの比較からこの式でオーダー 1 の項は，

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_0 \frac{\partial H}{\partial x} + v_0 \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.20)$$

である．なおここで， $\eta \ll H$ であっても， $\partial \eta / \partial x \ll \partial H / \partial x$ とは限らないことに注意しよう．上式， (u_1, v_1) の発散さえオーダー 1 の項で書き直すことができれば，(5.20) 式はすべてオーダー 1 の項で書くことができる．この書き直しが可能であるのは，前述の通り (5.17)(5.18) には (u_1, v_1) が各 1 項しか含まれていないことから容易に見て取れる．そこで (5.20) 式に代入しやすいように， $\partial(5.18)/\partial x - \partial(5.17)/\partial y$ とい

¹1.5 層モデルでは，層厚の変化が平均層厚よりも十分に小さいという条件は，流れが強い領域では満足されないことがあり，その場合準地衡流モデルを利用することは妥当ではない

う操作を行なえば,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ & + \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] \\ & + f_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \beta v_0 \\ & = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x H} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y H} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

が得られる．これを整理し, [] の中が

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.22)$$

とゼロになることを使うと,

$$\begin{aligned} f_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) & = - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ & \quad - \beta v_0 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x H} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y H} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる．これを, f_0 をかけた (5.20) に代入すれば,

$$\begin{aligned} & f_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_0 \frac{\partial H}{\partial x} + v_0 \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ & + H \left[- \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \\ & \quad - H \left[\beta v_0 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x H} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y H} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

との式が得られる．この式を流線関数で書き直せば, 求める式が得られる．そこで, 上式を両辺 H で割り, 流線関数 (5.16) を用いて, 書き直せば

$$\frac{f_0}{gH} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{H} \left(- \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{d}{dt} \Delta \psi - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x H} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y H} \right) = 0 \quad (5.25)$$

ここで, ロスピーの変形半径 $R_O \equiv \sqrt{g'H}/f_0$ を用いて整理すると,

$$\boxed{\frac{D}{Dt} (\Delta \psi - R_O^{-2} \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\vec{\tau}}{H}} \quad (5.26)$$

が得られる．これが, 求める準地衡流方程式である．準地衡流方程式は, Jacobian を用いて書くことも多く, この場合は

$$\boxed{\frac{D}{Dt} (\Delta \psi - R_O^{-2} \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \Delta \psi) + \frac{1}{H} J(\psi, H) = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\vec{\tau}}{H}} \quad (5.27)$$

と表される．原始方程式では, 3変数3方程式であったのが, 1変数1方程式にまとめられている．

なお, 上の導出ではレイリー摩擦および水平粘性を無視している．これらを考慮し, すなわち出発方程式の運動方程式を (5.1)(5.2) とした場合には,

$$\{r - v\Delta\} \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi - R_O^{-2} \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \Delta \psi) + \frac{1}{H} J(\psi, H) = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\vec{\tau}}{H}$$

が求める準地衡流方程式となる．また，この式の出発方程式では運動方程式にのみレイリーダンピングと水平粘性を仮定した．もし，連続の式にも同様な効果を導入すると，

$$\left\{ r - v\Delta + \frac{d}{dt} \right\} \Delta\psi - Ro^{-2} \left\{ r_h - v_h\Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\vec{\tau}}{H}$$

となる．これらの摩擦を含めた表現は，数値計算で特に有用である．数値計算では，水平摩擦なしに安定に計算はできないためである．

非発散渦度方程式と比較すると， $Ro (\equiv \sqrt{gH}/f_0)$ が付いた項を加えた形になっている．

5.3 境界条件と boundary forcing***

閉領域で準地衡流方程式を解くには境界条件が必要であり，この境界条件は通常の流体の境界条件と同様に，slip か non-slip のどちらかである．境界で non slip の場合は，境界に沿う方向の流速もゼロなので境界に直交する方向成分を n として

$$\psi_n = 0_{\text{non-slip}}$$

となる．また slip の場合は境界に沿う方向の流速の，境界に直交する方向の微分がゼロとなるので

$$\psi_n n = 0_{\text{slip}}$$

である．

どちらの場合でも，境界に直交する流れは生じ得ないので，各々の時間については境界上で流線関数が一定であり，

$$\psi = c(t) \text{ at boundary}$$

でなくてはならない．簡単な解析解を求める場合には，しばしば

$$\psi = 0 \text{ at boundary}$$

も用いられる．しかし，数値計算では (5.3) の $c(t)$ を求めるのが正しい流儀である．準地衡流方程式では，全質量の保存から流線関数に制約が加えられる．層厚 h と流線関数 ψ が次式

$$\eta = \frac{f_0}{g} \psi$$

によって結びついているので，質量の保存より

$$\int \int \eta dx dy = \int \int \psi dx dy = 0$$

でなくてはならない．

5.4 非線形 1.5 層準地衡流方程式の導出 (オーダーの推定をまじめに)***

実は，前々節の準地衡流方程式の導出は，正統的な方法ではない．正統的にはこの節で示すように，各変数を ϵ で展開して，導出を行う．一応こちらの方法も紹介しておこう．

出発方程式は前と同様に，(5.4)(5.5)(5.1) である．

これから上記方程式系 (3.1) (3.2) (3.4) に準地衡流近似 (quasi geostrophic approximation) を用いるのであるが，その際に無視できる項を判別するために，項の大小を一見して分かるようにすれば便利である．そのために無次元化という手法を用いよう．ここで代表的な長さ，時間，流速スケールを L, T, U として，層厚の偏差と初期層厚のスケールをおのおの N_0, N とすれば，

$$\begin{aligned}
(x, y) &= L(x^*, y^*) \\
t &= Tt^* \\
(u, v) &= U(u^*, v^*) \quad (3.5) \\
h &= N_0 h^*, H = NH^* \\
(\tau^x, \tau^y) &= \Gamma(\tau^{x*}, \tau^{y*})
\end{aligned}$$

と表される．上で，星印のついているものが無次元量，付いていないものが次元量である．これを用いて

(3.1) (3.2) (3.4) を書き直せば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{fT} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U}{fL} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - v^* \\
= -g' \frac{N_0}{fUL} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - rUu + v_h \frac{1}{fUL^2} \Delta^* u^* + \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \tau^{*x} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{fT} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{U}{fL} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + u^* \\
= -g' \frac{N_0}{fUL} \frac{\partial h^*}{\partial y^*} - rUv + v_h \frac{1}{fUL^2} \Delta^* v^* + \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \tau^{*y} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_0}{N} \frac{L}{UT} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{N_0}{N} \left(u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial h^*}{\partial y^*} \right) + \frac{N_0}{N} h^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \\
+ H^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = 0 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

さてここで，ほぼ地衡流が成り立つと仮定しよう²．すなわち，(3.6) (3.7) より，

$$\frac{1}{fT} = \frac{U}{fL} \ll 1, \quad v_h \frac{1}{fUL^2} \ll 1, \quad rU \ll 1, \quad \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \ll 1, \quad g' \frac{N_0}{fUL} \approx 1$$

である．ここで，時間スケールは，流速のスケールと長さスケールより与えられるとした．すなわち， $L = UT$ である．なお最初の式は， $1/f$ で定まる時間スケール，すなわち地衡流の状態に調節される時間スケールよりも，現象の時間スケール T は十分に長いこと，および非線形項のコリオリ項に対する相対的な大きさを表すロスビー数 Ro が 1 より十分に小さいことを表している．

$$Ro \equiv \frac{U}{fL} \ll 1$$

ここで，1 よりも十分に小さい項のオーダーを，

$$\frac{1}{fT} = \frac{U}{fL} v_h \approx \varepsilon, \quad \frac{v_h}{fUL^2} \approx \varepsilon, \quad rU \approx \varepsilon, \quad \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \approx \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1$$

として表そう．なお，(3.8) では第一項は $L = UT$ の関係より 1 のオーダーである．最後の項は，全層の厚さが層厚の偏差よりも十分に大きいと仮定して³．

$$\frac{N}{N_0} \approx \varepsilon$$

であるとしよう．ここで，

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\
v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\
h &= h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \\
f &\cong f_0 + \beta y
\end{aligned}$$

として次元量について (3.6)~(3.8) を書き直せば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial t} + (u_0 + \varepsilon u_1) \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial x} + (v_0 + \varepsilon v_1) \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial y} - (f_0 + \beta)(v_0 + \varepsilon v_1) \\
= -g' \frac{\partial(h_0 + \varepsilon h_1)}{\partial x} - r(u_0 + \varepsilon u_1) + v_h \Delta(u_0 + \varepsilon u_1) + \frac{1}{\rho_0 H} \tau^x \\
\frac{\partial(v_0 + \varepsilon v_1)}{\partial t} + (u_0 + \varepsilon u_1) \frac{\partial(v_0 + \varepsilon v_1)}{\partial x} + (v_0 + \varepsilon v_1) \frac{\partial(v_0 + \varepsilon v_1)}{\partial y} + (f_0 + \beta)(u_0 + \varepsilon u_1) \\
= -g' \frac{\partial(h_0 + \varepsilon h_1)}{\partial y} - (v_0 + \varepsilon v_1)v + v_h \Delta(v_0 + \varepsilon v_1) + \frac{1}{\rho_0 H} \tau^y
\end{aligned}$$

² コリオリ項とバランスする項がどれかは無くてはならない．準地衡流近似では，それが圧力勾配である場合に，近似的に地衡流が成立している場合に，適用することができる．従って，この仮定が成り立っていない場合には，準地衡流は適用できない．

³ またこの仮定が成立しない場合，すなわち界面の変位が全層の厚さと同程度の大きさになる場合には，準地衡流は適用できない．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(h_0+\varepsilon h_1)}{\partial t} + \left((u_0 + \varepsilon u_1) \frac{\partial(h_0+\varepsilon h_1)}{\partial x} + (v_0 + \varepsilon v_1) \frac{\partial(h_0+\varepsilon h_1)}{\partial y} \right) \\ & + (h_0 + \varepsilon h_1) \left(\frac{\partial(u_0+\varepsilon u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0+\varepsilon v_1)}{\partial y} \right) + H \left(\frac{\partial(u_0+\varepsilon u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0+\varepsilon v_1)}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

ここで無次元化の議論より項にかかる係数として、運動方程式ではコリオリ項 (f_0) と圧力勾配のみがオーダー 1 で他は ε であったこと、連続の式 (3.8) では最後の式がオーダー 1 で他はオーダー ε で合ったことを用いて、オーダー 1 の式とオーダー ε の式を分けて書こう。するとオーダー 1 については

$$-f_0 v_0 = -g' \frac{\partial h_0}{\partial x} \quad (5.28)$$

$$+f_0 u_0 = -g' \frac{\partial h_0}{\partial y} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (5.30)$$

であり、オーダー ε については

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - \beta y v_0 - f_0 v_1 \\ & = -g' \frac{\partial h_1}{\partial x} - r u_0 + v_h \Delta u_0 + \frac{1}{\rho_0 H} \tau^x \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \beta y u_0 + f_0 u_1 \\ & = -g' \frac{\partial h_1}{\partial y} - r v_0 + v_h \Delta v_0 + \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \tau^y \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \left(u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + H \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.33)$$

となる。なお、最後の式では $h_0 (\partial u_0 / \partial x + \partial v_0 / \partial y)$ という項は、(5.30) より消去している。ここで注目すべきなのは、(5.28) (5.29) を満たす式であれば、自動的に (5.30) をも満たすことである。すなわち、(5.28)~(5.30) で未知数が 3 変数で、3 式あるのであるから一見解が元鞠層で求まりそうであるが、実際に独立な式は 2 つしかなく、解を得ることはできない。このことを地衡流縮退 (geostrophic degeneracy) と言う。この 3 式は、任意の h_0 について (5.28)~(5.30) を満たす u_0, v_0 が得られる。従って、初期値・境界条件・外力に対応してただ一つ選択される u_0, v_0 の場を求めるには (5.31)~(5.33) を用いなくてはならない。

そこで u_1, v_1, h_1 を (5.31)~(5.33) から消去しよう。まず h_1 を消すために、 $\partial (5.32) / \partial x - \partial (5.31) / \partial y$ を行い、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ & + \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] \\ & + \beta v_0 + \beta y \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ & = -r \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + v_h \Delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\Gamma}{\rho_0 H} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

を得る。ここで \square 内は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ & = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

と変形される。また、オーダー 1 の流速が非発散であること (5.30) を用い、さらにオーダー ε の発散項に (5.33) を代入すれば、(5.34) は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ & + \frac{f_0}{H} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) h_0 + \beta v_0 \\ & = -r \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + v_h \Delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_0 H} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

となる．ここで u_0, v_0 について流線関数 ψ を用いるならば

$$u_0 = -\psi_y, v_0 = \psi_x \quad (5.36)$$

この場合 h_0 については

$$h_0 = \frac{f_0}{g'}\psi \quad (5.37)$$

でまた，

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = \Delta_h \psi \quad (5.38)$$

となる．従って，(5.35) を流線関数を用いて書けば，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Delta_h \Psi - Ro^{-2} \Psi) + \beta v_0 = -r \Delta_h \Psi + v_h \Delta_h^2 \Psi + \frac{curl(\vec{\tau})}{\rho_0 H}$$

となる．ただしここで， $Ro \equiv \sqrt{g'H}/f_0$ はすでに学んだロスビー変形半径である．この左辺において打ち消し合う項を消去し，また，Jacobian を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_h \Psi - Ro^{-2} \Psi) + J(\Psi, \Delta_h \Psi) + \beta v_0 = -r \Delta_h \Psi + v_h \Delta_h^2 \Psi + \frac{curl(\vec{\tau})}{\rho_0 H} \quad (5.39)$$

である．ここで 1.5 層方程式の場合，層厚と流線関数が (5.37) によって結びついているので，質量の保存より

$$\iint h_0 dx dy = \iint \psi dx dy = 0 \quad (5.40)$$

でなくてはならない．また境界条件は，各々の時間については境界上で流線関数が一定であり，

$$\psi = c(t) \text{ at boundary} \quad (5.41)$$

および境界で non slip の場合は，境界に沿う方向の流速もゼロなので境界に直交する方向成分を n として

$$\partial \varphi / \partial n = 0 \text{ non-slip} \quad (5.42)$$

また slip の場合は境界に沿う方向の流速の直交成分方向の微分がゼロとなるので

$$\partial^2 \varphi / \partial n^2 = 0 \text{ slip} \quad (5.43)$$

である．

5.4.1 Boundary Forcing ***

上の境界条件を用いて解くためには次のようにすればすれば良い．まず， n 時間ステップまで流線関数が既知であるとして， $n+1$ 時間ステップの仮の流線関数 Ψ^{n+1} を，境界上でゼロを仮定して，例えば時間に中央差分を用いるのであれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} (\Delta_h \Psi^{n+1} - Ro^{-2} \Psi^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta t} (\Delta_h \Psi^{n-1} - Ro^{-2} \Psi^{n-1}) \\ & = -J(\Psi, \Delta_h \Psi) - \beta v_0 - r \Delta_h \Psi + v_h \Delta_h^2 \Psi + \frac{curl(\vec{\tau})}{\rho_0 H} \end{aligned} \quad (5.44)$$

などとして求める．次に

$$\Delta_h \Psi'' - Ro^{-2} \Psi'' = 0 \quad (5.45)$$

$$\Psi'' = 1 \text{ at boundary} \quad (5.46)$$

を満たす流線関数 Ψ'' を用いて解を,

$$\Psi^{n+1} = \Psi'^{n+1} + c(t) \Psi'' \quad (5.47)$$

と表すこととすれば, 質量保存式 (13.2) を満たすために,

$$\iint \Psi^{n+1} dx dy = \iint \Psi'^{n+1} + c(t) \Psi'' dx dy = 0$$

より,

$$c(t) = - \frac{\iint \Psi'^{n+1} dx dy}{\iint \Psi'' dx dy} \quad (5.48)$$

として $c(t)$ を求めることができる.

5.5 連続成層準地衡流方程式（非粘性）の導出 **

後に学ぶ傾圧不安定を議論する基礎となるのが, この節で扱う連続成層の準地衡流方程式である. 出発方程式系は中緯度 β 平面上の原始方程式系で

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f_0 v - \beta y v &= - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f_0 u + \beta y u &= - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

が境界条件

$$w = 0 \quad \text{at} \quad z = -H$$

に従うとする. なお, $\bar{\rho}$ は一定値である⁴.

ここで, 地衡流が近似的に成立していると仮定しよう. すなわち, 運動方程式において, コリオリ項と圧力傾度項をオーダー 1 であるとする他の項はオーダー ε であり, $\varepsilon \ll 1$ となる. さらに, 変数 u, v, w, p, ρ を ε を用いて展開しよう. すなわち, ある変数 a は

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

と置くことができ, a_0 は a_1 よりもオーダー ε だけ大きく, a_1 もまた a_2 よりもオーダー ε だけ大きい. また密度については,

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_B(z) + \rho_0(x, y, z, t) + \rho_1(x, y, z, t) + \dots$$

とする. このように ε 展開した変数で方程式を書き直すと

⁴通常 ρ_0 を一定値するが, 今回は $\rho = \bar{\rho} + \rho_B + \rho'$, $\rho' = \rho_0 + \rho_1 + \dots$ というようにする都合から, $\bar{\rho}$ を一定値としている.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (u_0 + u_1) + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + u_1) + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + u_1) \\
& + (w_0 + w_1) \frac{\partial}{\partial z} (u_0 + u_1) - f_0 (v_0 + v_1) - \beta y (v_0 + v_1) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} (p_0 + p_1) \\
& \frac{\partial}{\partial t} (v_0 + v_1) + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + v_1) + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} (v_0 + v_1) \\
& + (w_0 + w_1) \frac{\partial}{\partial z} (v_0 + v_1) + f_0 (u_0 + u_1) + \beta y (u_0 + u_1) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} (p_0 + p_1) \\
& \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + u_1) + \frac{\partial}{\partial y} (v_0 + v_1) + \frac{\partial}{\partial z} (w_0 + w_1) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p_1) = -(\rho_0 + \rho_1) g \\
& \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho_1) + (u_0 + u_1) \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 + \rho_1) \\
& + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 + \rho_1) + (w_0 + w_1) \frac{\partial}{\partial z} (\rho_B + \rho_0 + \rho_1) = 0
\end{aligned}$$

オーダー1の項はオーダー1の項自体でバランスしなくてはならない．運動方程式のオーダー1の項を取り出すと，

$$-f_0 v_0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p_0, \quad f_0 u_0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} p_0$$

の地衡流バランスの式である．この⁵地衡流は非発散であるので $\partial w_0 / \partial z = 0$ となり（連続の式のオーダー1の部分をチェックすれば良い），境界条件から $w_0 = 0$ である．また，非発散であるため，流線関数 ψ を定義でき，

$$\psi = \frac{1}{\bar{\rho} f_0} p_0 \quad (5.49)$$

となる．後の便利のために，密度 ρ_0 も流線関数であらわしておこう．すなわち，

$$\rho_0 = -\frac{p_{0z}}{g} = -\frac{\bar{\rho} f_0}{g} \psi_z \quad (5.50)$$

次に支配方程式のオーダー ε の部分を抜き出すと（このオーダーの静水圧の式は不要なので示さない），

$$\frac{\partial}{\partial t} u_0 + u_0 \frac{\partial}{\partial x} u_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} u_0 - f_0 v_1 - \beta y v_0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} p_1 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_0 + u_0 \frac{\partial}{\partial x} v_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} v_0 + f_0 u_1 + \beta y u_0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} p_1 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_1 + \frac{\partial}{\partial z} w_1 = 0 \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \rho_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \rho_0 + w_1 \frac{\partial}{\partial z} \rho_B = 0 \quad (5.54)$$

である．なお w_0 はゼロとなることを，運動方程式と密度方程式で用いている．ここで運動方程式から圧力項を消去するために $\partial(5.52)/\partial x - \partial(5.51)/\partial y$ を行って整理すると，

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\
& + f_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \beta v_0 = 0
\end{aligned}$$

ここで斜線で示したようにオーダー1の流速が非発散であることを用い，さらにオーダー ε の発散項に (5.53) を代入し，渦度に $\partial v_0 / \partial x - \partial u_0 / \partial y = \Delta \psi$ と流線関数を使えば，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \psi - f_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \beta v_0 = 0 \quad (5.55)$$

が得られる．

⁵地衡流を緯度変化する f について $-fv = -p_x/\rho$ などと定義すると，非発散ではない

(5.55) の $\partial w_1 / \partial z$ を流線関数を使って求めよう．まず， w_1 は密度方程式 (5.54) と密度と流線の関係式 (5.50) から

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{\rho_{Bz}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \rho_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \rho_0 \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_{Bz}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\bar{\rho} f_0}{g} \psi_z \right) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{f_0 \psi_z}{N^2} \end{aligned} \quad (5.56)$$

となる．この鉛直微分を取ると

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0 \psi_z}{N^2} \right) - \frac{f_0}{N^2} \left(u_{0z} \frac{\partial}{\partial x} + v_{0z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_z$$

である．ここで右辺第 2 項は $u_{0z} v_{0z} + v_{0z} (-u_{0z}) = 0$ となるので消えるので結局．

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0 \psi_z}{N^2} \right) \quad (5.57)$$

(5.57) を (5.55) に代入して， $\beta v_0 = (\partial / \partial t + u_0 \partial / \partial x + v_0 \partial / \partial y) \beta y$ と書けることを用いれば，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \psi_z \right) + \beta y \right\} = 0 \quad (5.58)$$

が得られる．この式は明らかに $\{ \}$ 内が流れに乗って保存することを示している．この $\{ \}$ は，準地衡流近似の下での連続成層流体の渦位 q ，である．もちろん (5.58) を流線関数のみで，表すこともでき，準地衡流方程式の表記としてはこちらが普通である．すなわち，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \psi_z \right) + \beta y \right\} = 0 \quad (5.59)$$

あるいは，ヤコビアン (Jacobian operator), $J(a, b) = \partial a / \partial x \partial b / \partial y - \partial a / \partial y \partial b / \partial x$ を用いた表現もしばしば好まれ，上式を

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0 \quad (5.60)$$

と表すこともできる．(5.59)(5.60) 式はいずれも連続成層流体の準地衡流方程式 (Quasi-Geostrophic Equation) と呼ばれる．

なお流線関数が得られれば， u, v はただちに求めることができる．また p, w, ρ は，(5.49)(5.56)(5.50) からそれぞれ求めることができる．このうち (5.56) には u_0, v_0 が残っているので，流線関数で書き直すと

$$w = \frac{f_0}{N^2} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} + J(\psi, \psi_z) \right) \quad (5.61)$$

と表現できる．

5.6 問題

支配方程式が

$$\left[r - v \Delta + \frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] u - (f_0 + \beta y) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau^x}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.62)$$

$$\left[r - v \Delta + \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] v + (f_0 + \beta y) u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau^y}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta + H) + \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + H)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\eta + H)] = 0 \quad (5.64)$$

であるなら，準地衡流方程式が次式になることを示せ．

$$\left[r - v\Delta + \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] u - (f_0 + \beta y)v = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\tau^x}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.65)$$

$$\left[r - v\Delta + \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right] v + (f_0 + \beta y)u = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\tau^y}{\rho_0(\eta + H)} \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta + H) + \frac{\partial}{\partial x}[u(\eta + H)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(\eta + H)] = 0 \quad (5.67)$$

第6章 赤道波動

気候変動を議論する上で、エル・ニーニョに代表される熱帯の変動は重要である。その熱帯の大気・海洋の力学を議論するには、赤道波動を欠かすことはできない。赤道波動とは、赤道付近に特有の波動解で示される、赤道ケルビン波、混合ロスビー重力波、赤道ロスビー波の総称である。この章では、それらの赤道波動の性質を議論しよう。主な特徴をまとめておくと、

- 赤道ケルビン波：南北の構造は、ガウス関数となる。非分散の波で、速度は重力波と同じ \sqrt{gH} 、ただし、東向きにしか伝播しない。
- 赤道ロスビー波：南北の構造は、三角関数が遠方で減衰する構造となる。分散性の波だが、長波の領域では非分散の波で近似することができ、これらの長波ロスビー波は全て西向きの位相速度と群速度を持つ。一番速度が速い南北第一モードは、ケルビン波の $1/3$ の速度である。
- 混合ロスビー重力波：分散性の波で群速度は常に東向きだが、位相速度は東向き・西向きの両方がある。

6.1 赤道 β 平面での無次元化**

支配方程式は、線形浅水方程式とする。

$$u_t - fv = -g\eta_x \quad (6.1)$$

$$v_t + fu = -g\eta_y \quad (6.2)$$

$$h_t + H(u_x + v_y) = 0 \quad (6.3)$$

ただしここで、 $f = \beta y$ である。これを赤道 β 平面近似 (equatorial β -plane approximation) と呼ぶ。

後の便利のために、まず上の式を無次元化しよう。無次元化に必要なのは、変数 (x, y, t, u, v, η) それぞれの、代表的な大きさ (スケール) である。このうち、 (x, y) と (u, v) には、同じスケールを使うことができる。無次元化につかえる次元量としてまず目につくのは、 β である。 β の次元は、 f の次元が [1/時間] なので、[1/(時間 長さ)] になる。これと、重力波の速度 $c = \sqrt{gH}$ を組み合わせれば、時間および長さのスケールを作ることができる。また、水位変動 η のスケールは、水深 H としてみよう。結局、無次元の量に*をつけて示せば、

$$u = cu^*, \eta = Hp^*,$$

$$t = t^*/\sqrt{\beta c}, (x, y) = \sqrt{c/\beta}(x^*, y^*),$$

である。これらの無次元量を使って (6.1)-(6.3) を無次元量で書きなおそう。ただし簡単のために以下では、*

をつけずに無次元量を表すこととする。したがって、この章で今後扱う式は

$$u_t - yv = -p_x \quad (6.4)$$

$$v_t + yu = -p_y \quad (6.5)$$

$$p_t + u_x + v_y = 0 \quad (6.6)$$

である。

ここで気をつけなくてはならないのは、運動方程式に変数係数 y が入っていることである。このため、解が y 方向には三角関数で示すことができないことが予想される。つまり、 y 方向には、三角関数以外の構造を持った

6.2 赤道ケルビン波*

まず特別な解として $v = 0$ の解を探そう。すると、 u と h とに、 y の掛け算も微分も含まれていない (6.4) と (6.6) から u と h は南北方向に同じ分布を持つことが明らかであり、この構造関数を $Y(y)$ と仮定しよう。すなわち

$$(u, p) = (u_0, p_0)Y(y) \exp(i(kx - \omega t)) \quad (6.7)$$

と仮定する。こうすれば容易に、

$$c = \omega/k = \pm 1 \quad (6.8)$$

が得られる。さらに南北方向の運動方程式 (6.5) を書き直せば

$$yY - \frac{p_0}{u_0} Y_y = 0 \quad (6.9)$$

となる。(6.4) から、 $p_0/u_0 = \omega/k$ なので、なので、結局 $c = \pm 1$ に対して、

$$yY \pm Y_y = 0 \quad (6.10)$$

が得られる。この解は、

$$Y = \exp \mp \frac{y^2}{2} \quad (6.11)$$

であり、確かに解であることは代入して容易に確認できる。 $y \rightarrow \infty$ で $Y \rightarrow 0$ とすれば、ここでは負号を選択する必要があり、それは ($c = +1$) に対応する。結局解は、

$$u = p = u_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \exp(i(x - t)) \quad (6.12)$$

となる。

これが赤道ケルビン波である。南北方向の構造は、赤道に最大値を持つガウス関数で、東西流速・圧力 (水面の変位) が同じ構造となる。伝播速度が、無次元で 1、すなわち次元量では \sqrt{gH} という重力波の速度であることから、波を生じさせる元となる復元力は本質的に重力である。ただし、 β 効果によって、南北方向に流体が移動しないという制約が課された重力波と考えることができる。

6.3 ロスビー波・混合ロスビー重力波・慣性重力波**

次に $v \neq 0$ の解を、無次元化された支配方程式 (6.4)-(6.6) から求めよう。通常の連立偏微分方程式を解くには、1変数1式に帰着させる。方程式の対象性から直感的には、 p に帰着させるのがよさそうである。また、 u と v であれば、 u の方が大きいので、それについて解くのがありそうである。しかし1変数1式に帰着させようとするとは、 v に帰着させなくては、少なくともすんなりとは解けない。なぜかという、 v については、ある一つの波の南北方向の構造関数が一つのエルミット関数で示すことができるからである。

まず p を消去しよう． $(\frac{\partial}{\partial y})(6.4)$ - $(\frac{\partial}{\partial x})(6.5)$ から，

$$u_{ty} - yu_x - v - yv_y - v_{tx} = 0 \quad (6.13)$$

$(\frac{\partial}{\partial t})(6.4)$ - $(\frac{\partial}{\partial x})(6.6)$ から，

$$u_{tt} - u_{xx} - yv_t - v_{xy} = 0 \quad (6.14)$$

そして， $(\frac{\partial}{\partial t})(6.4)$ - $(\frac{\partial}{\partial y})(6.6)$ から

$$yu_t - u_{xy} + v_{tt} - v_{yy} = 0 \quad (6.15)$$

がそれぞれ得られる．次に， $-\frac{\partial}{\partial x}(6.13) + y(6.14) - \frac{\partial}{\partial t}(6.15)$ から，

$$v_{xxt} - v_{yyt} + v_x - y^2v_t - v_{ttt} = 0 \quad (6.16)$$

ここで， y について変化する係数（右辺代4項）が含まれているので， y 方向に関しては三角関数解を仮定することができない．そこで， $v(x, y, t) = \exp(i(kx - \omega t))V(y)$ と仮定して上式に代入すると，

$$V_{yy} + \left(\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} - y^2 \right) V = 0 \quad (6.17)$$

となる．なお， V に対して適切な境界条件は， $y \rightarrow \text{inf}$ で $V \rightarrow 0$ である．

この式は偏微分方程式でおなじみの，スツルム・リュービル型の固有値問題の形をしている（参考:??）．

変数係数のスツルム・リュービル型の固有値問題の解は多くの場合，特殊関数で与えられる．(6.17) の場合は，エルミート関数 (*Hermit function*) が解となり，(6.17) の式は，エルミートの微分方程式

$$\psi_n''(y) + (2n + 1 - y^2)\psi_n(y) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.18)$$

と同等である．ここで，' は y 微分を意味している．エルミート関数の形状を図 6.1 に示す．

(6.17) と (6.18) が等価であるということは，

$$\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.19)$$

が満足されるようにある k に対して ω は ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対応する離散的な値を取らなくてはならない．なお，上式は ω の 3 次方程式なので， n と k を特定の値に選んでも， ω は 3 つの解を持つ．すなわち，位相速度が西に伝播するロスビー波で 1 解，位相速度が東と西に伝播する慣性重力波で 2 つの解，計 3 つの解が得られる．ただし， $n = 0$ については特別である．この場合，(5.29) は， $(\omega + k)(\omega - k - 1/\omega) = 0$ に帰着するが $\omega = -k$ は物理的には意味をなさない解である． $\omega - k - 1/\omega = 0$ に対応する他の 2 解は $\omega - k$ 平面で原点对称となるので，そのうち一つだけを考慮すれば良い，ここでは $\omega \geq 0$ の半平面の解を選ぼう．これが混合ロスビー重力波 *mixed Rossby-gravity wave* である．ここで得られた解に更に前節の赤道ケルビン波を加えて，すべての赤道波解（すなわち支配方程式のすべての解）が得られる．また赤道ケルビン波の分散関係は，(6.19) で $n = -1$ と置おいても得られることから，形式的に $n = -1$ の解として示される．赤道波の分散関係を図 6.2 に示す．

$n \geq 0$ に対する v の固有解は，共通因数である $\exp(i(kx - \omega t))$ を除いて

$$v_n = V_n \psi_n(y) \quad (6.20)$$

となる．また， u, p は，(6.4)-(6.6) に (6.20) を代入して，

$$u_n = \frac{V_n}{i(\omega^2 - k^2)} \left(-\omega y v + k \frac{dv}{dy} \right)$$

$$p_n = \frac{V_n}{-i(\omega^2 - k^2)} \left(k y v - \omega \frac{dv}{dy} \right)$$

から求めることができる．

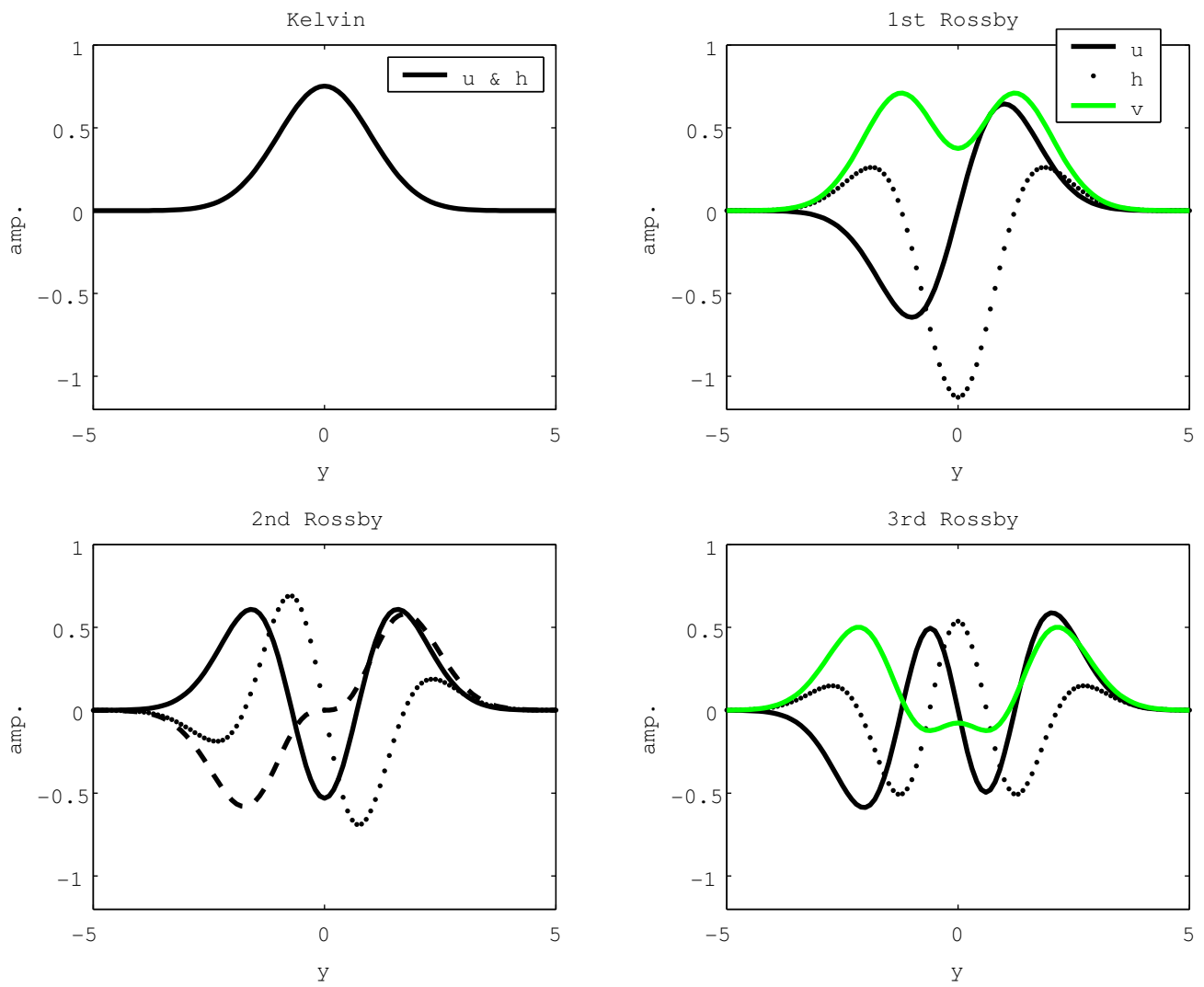


図 6.1: エルミート関数 . エルミート関数は原点近傍で振動し , 遠方で減衰する関数である .

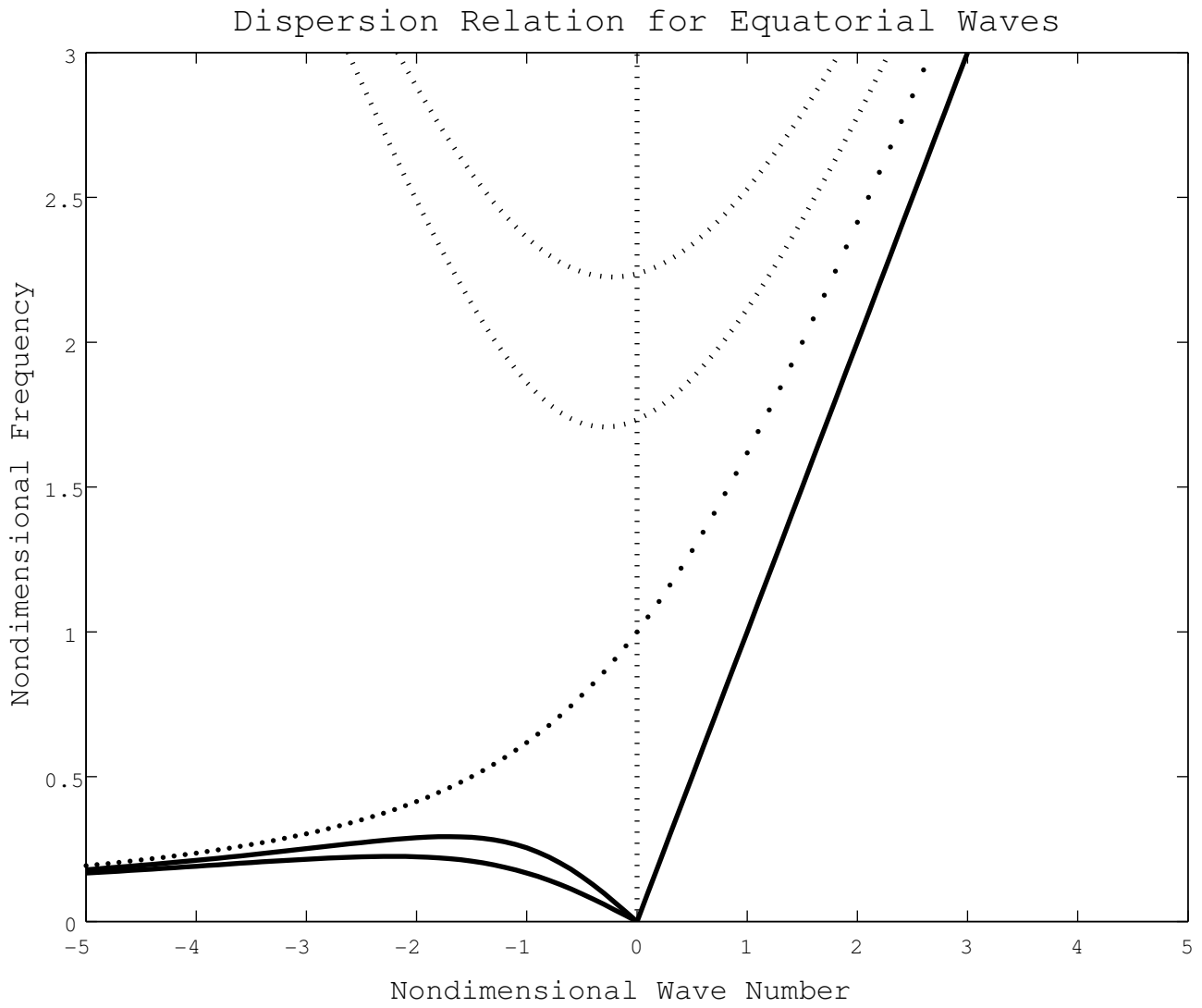


図 6.2: 赤道波の分散関係 .

ただしこれでは u, p が実際にどのような形状を持つかを理解するには不便である．また，我々は長周期・長波長の現象にのみ関心がある．分散関係 (6.19) において長周期長波長を仮定 ($\omega, k \rightarrow 0$) すると，長波ロスビー波の分散関係式

$$k = -(2n+1)\omega \quad (6.21)$$

が得られる．この関係式とエルミート関数の漸化式 (14.5)(14.6) を用いると， u, p は

$$u = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{V_n}{\omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \psi_{n+1}(y) - \frac{1}{\sqrt{n}} \psi_{n-1}(y) \right\} \quad (6.22)$$

$$p = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{V_n}{\omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \psi_{n+1}(y) + \frac{1}{\sqrt{n}} \psi_{n-1}(y) \right\} \quad (6.23)$$

q となることが示される．

(6.22)(6.23) は，ある v に関するエルミート n 赤道波についての第 n モードの u, p に，エルミート関数については第 $n-1$ および第 $n+1$ モードが寄与していることを表している．

ケルビン波と長波ロスビー波の形状を図 6.3 に示す．

6.4 外力による赤道波の励起***

(6.19) 分散関係は，長波または短波の近似を用いずして得ることができたけれど，外力がどう赤道波を励起するのかを議論するには，あらかじめ長波近似と等価な片地衡流近似 (*semi-geostrophic approximation*) を用いると扱いやすい (Gill and Clarke 1974)．片地衡流近似とは，南北流速の加速度項を無視する近似である．片地衡流近似に加えて，風応力の効果および連続の式への加熱の効果 (後に示すように熱帯大気が降水に伴う凝結熱で加熱されるとすると，その効果は1層の式では連続の式での外力として表すことができる) を考慮し，さらに適切に無次元化すると支配方程式は次のように書ける

$$u_t - yv = -p_x + X \quad (6.24)$$

$$yu = -p_y + Y \quad (6.25)$$

$$p_t + u_x + v_y = Q \quad (6.26)$$

ここで， X, Y, Q はそれぞれ無次元化された東西風応力，南北風応力，加熱である．海洋の場合は X, Y のみを，大気の場合は Q のみを考慮し，他の式の外力はゼロとすればよい．

ここで

$$q \equiv p + u, r \equiv p - u \quad (6.27)$$

を定義しよう．なぜこう p と u を足したり，引いたりするとよいかというと，そうすることで，…… できるからである．

(6.24)+(6.26) で，時間微分と東西微分を $p+u$ の形にして， p を代入すれば，

$$q_t + q_x + (\partial/\partial y - y)v = Q + X, \quad (6.28)$$

一方，(6.26)-(6.24) で $p-u$ の形にして， r を代入すれば

$$r_t - r_x + (\partial/\partial y + y)v = Q - X, \quad (6.29)$$

また (6.25) を2倍して

$$q_y + yq + r_y - yr = 2Y \quad (6.30)$$

従属変数 q, r, X, Y, Q をエルミート関数で展開する．すなわち，

$$(v, q, r, X, Y, Q)(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n, q_n, r_n, X_n, Y_n, Q_n)(x, t) \psi_n(y)$$

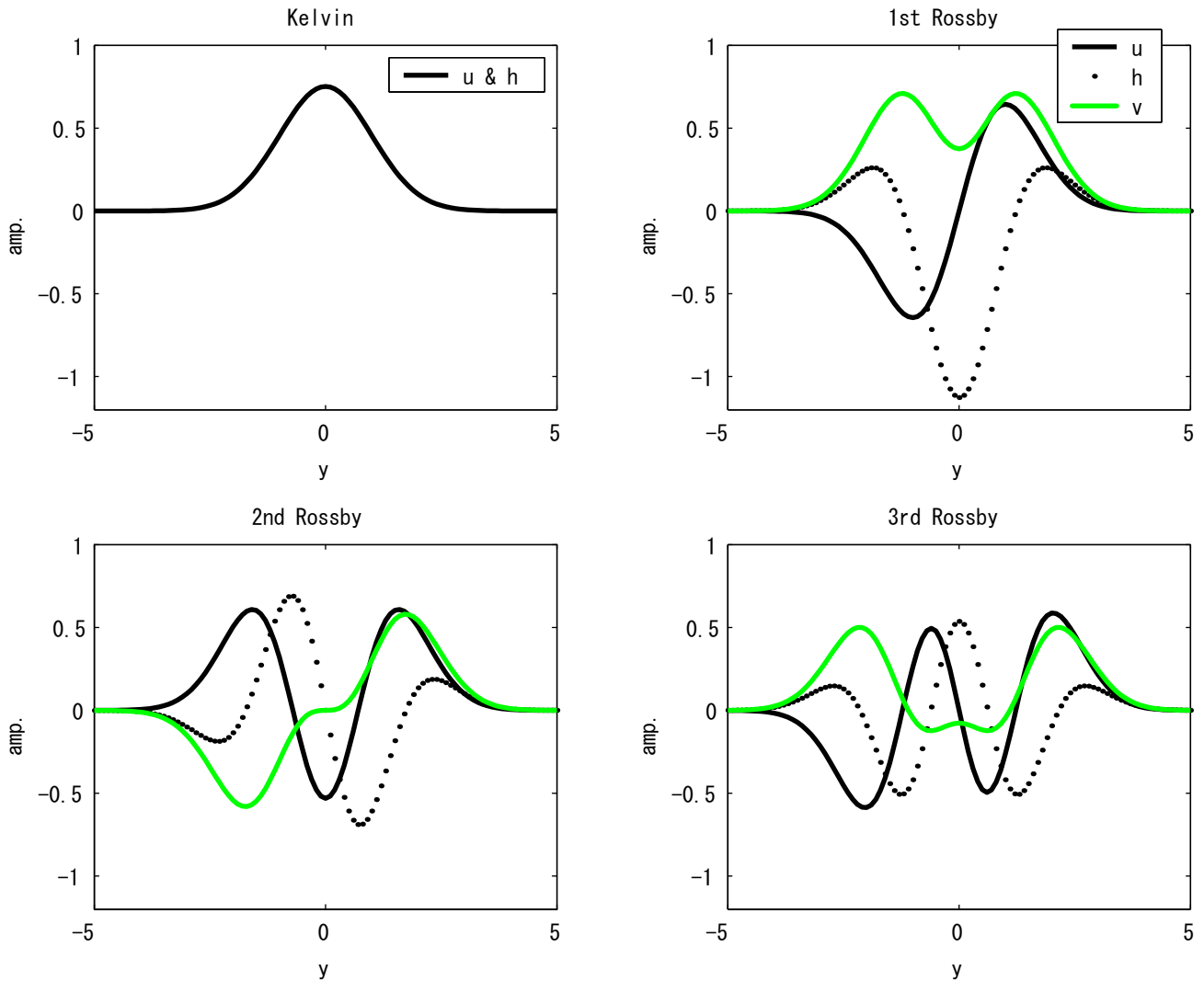


図 6.3: ケルビン波と第一～第三ロスビー波の, p (実線), u (点線), v (破線). 第 n ロスビー波について n が奇数(偶数)ならば, u, p は赤道に対称(反対称)で v は赤道に反対称(対称)である. また, 偶数モードの u は赤道での振幅が赤道外での振幅よりも大きいのにに対して, p は逆に赤道外での振幅の方が赤道での振幅よりも大きい.

である．エルミート関数は正規直交であるから，

$$v_n = \int_{-\infty}^{\infty} v \psi_n(y) dy$$

という要領で，エルミート関数の展開係数を求めることができる．

そこで，(6.28) を書き直して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q_{n,t} + q_{n,x}) \psi_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,x} (\psi_{n,y} - y \psi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (Q_n + X_n) \psi_n$$

ここで v_n にかかっているエルミート関数に，エルミート関数の漸化式 (14.2) を使うと，

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q_{n,t} + q_{n,x}) \psi_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,x} (-\sqrt{2(n+1)} \psi_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (Q_n + X_n) \psi_n$$

となる．上式の両辺に $\int_{-\infty}^{\infty} () \psi_m dy$ を作用させると

$$q_{m,t} + q_{m,x} - \sqrt{2m} v_{m-1} = Q_m + X_m, \quad m \geq 1 \quad (6.31)$$

$$q_{0,t} + q_{0,x} = Q_0 + X_0, \quad (m = 0) \quad (6.32)$$

である．

(6.29) についても，同様にすればよい．その手順中の v に関する部分だけ書けば

$$v_y + yv = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (\psi_{n,y} + y \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sqrt{2n} \psi_{n-1}$$

となる．最後の变形には漸化式 (14.3) を用いた．また最後の和を $n = 1$ からとしているのは，その漸化式が $n = 0$ については， $\psi_{0,y} + y \psi_0 = 0$ となるからである．上式の間係を踏まえて，(6.29) をエルミート関数の係数について表すと，

$$r_{m,t} - r_{m,x} - \sqrt{2(m+1)} v_{m+1} = Q_m - X_m, \quad m \geq 0 \quad (6.33)$$

が得られる．

最後に残った (6.30) をエルミート関数に展開して表せば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n (\psi_{n,y} + y \psi_n) + \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\psi_{n,y} - y \psi_n) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \psi_n$$

であるから，漸化式 (14.2)(14.3) を用いて，

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \sqrt{2n} \psi_{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n (-\sqrt{2(n+1)} \psi_{n+1}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \psi_n$$

となる．したがって，

$$q_{m+1} \sqrt{2(m+1)} - r_{m-1} \sqrt{2m} = 2Y_m, \quad m \geq 1 \quad (6.34)$$

$$q_1 \sqrt{2} = 2Y_0, \quad (m = 0) \quad (6.35)$$

が得られる．

こうして得られたエルミート関数に展開した式 (6.31)-(6.35) を， v の次数について整理しよう．ここで v の次数で整理するのは， v の次数が赤道波の次数に対応しているからである．まず， $n = -1, 0$ については，

$$\text{ケルビン波 } (m = -1) \quad q_{0,t} + q_{0,x} = Q_0 + X_0, \quad v = r = 0 \quad (6.36)$$

$$\text{混合重力ロスビー波 } (m=0) \quad q_1 = \sqrt{2}Y_0 \quad (6.37)$$

$$q_{1,t} + q_{1,x} - \sqrt{2}v_0 = Q_1 + X_1 \quad (6.38)$$

$$r = 0$$

となつて、これらの式からまず q を、ついで混合重力ロスビー波の場合は v を求めることができる。一方ロスビー波は、

$$\text{ロスビー波 } (m=1,2) \quad q_{m+1,t} + q_{m+1,x} - \sqrt{2(m+1)}v_m = Q_{m+1} + X_{m+1} \quad (6.39)$$

$$r_{m-1,t} - r_{m-1,x} - \sqrt{2m}v_m = Q_{m-1} - X_{m+1} \quad (6.40)$$

$$q_{m+1,t}\sqrt{2(m+1)} - r_{m-1}\sqrt{2m} = 2Y_m \quad (6.41)$$

となるので、なお、1つの未知変数のみを含む一つの式の形に整理することが、解を得るには必要である。そこで上式の最初の二式から v_m を消去すると、

$$\begin{aligned} \partial t(\sqrt{2m}q_{m+1} + \sqrt{2(m+1)}r_{m-1}) + \partial x(\sqrt{2m}q_{m+1} - \sqrt{2(m+1)}r_{m-1}) \\ = \sqrt{2m}(Q_{m+1} + X_{m+1}) + \sqrt{2(m+1)}(Q_{m-1} - X_{m-1}), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

となる。これに、(6.41) を代入して、整理すると

$$\begin{aligned} (2m+1)\partial t q_{m+1} - \partial x q_{m+1} = m(Q_{m+1} + X_{m+1}) \\ + \sqrt{m(m+1)}(Q_{m-1} - X_{m-1}) + (\partial t - \partial x)\sqrt{2(m+1)}Y_m, \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (6.42)$$

と、求める1変数1式が得られた。この式から q_{m+1} を求めれば、(6.41) を求めることができ、さらに(6.27) から u, p を求めることができる。またこの式から伝播速度は明らかに、 $-1/(2m+1)$ であつて、これは長波ロスビー波の伝播速度に一致する。一連の導出では、片地衝流以外に近似は用いていないので、片地衝流近似は長波近似を含んでいると言える。

なお、一般には支配方程式の ∂t は、減衰も含めて $\partial t + \epsilon$ と置き換えられる。対応して最終的に得られる方程式も、 ∂t を $\partial t + \epsilon$ に置き換えればよい。また大気応答を議論する場合には、気候変動の時間スケールよりも大気応答によする時間スケールの方がずっと短いので、多くの場合定常解を仮定するが、その場合は ∂t に代えて ϵ とするだけでよい。

結局ケルビン波とロスビー波は、1階の偏微分方程式

$$f_t + cf_x = F$$

の形に帰着した。ただし上式では f が未知変数、 F が外力である。

6.5 Matlab スクリプト

6.5.1 分散関係の描画

```
% 長波近似しない分散関係赤道ロスビー波の分散関係 omega^3-(k^2+2n+1) omega - k = 0 (n>=1)
```

```
% および、赤道ケルビン波 (n=-1)、そして混合重力ロスビー波 (n=0) の分散関係を描く。
```

```
kmn=-5; kstp=0.1; kmx=5;
```

```
k=kmn:kstp:kmx;
```

```
o_mx1=(k+sqrt(k.^2+4))/2;
```

```
% mx2=(k-sqrt(k.^2+4))/2; % mx1 に原点对称なので図示せず。
```

```
o_kelvin=k;
```

```
for n=1:2
```

```
nk=0
```

```

for k1=kmn:kstp:kmx
    nk=nk+1;
    c=[1,0,-(k1^2+2*n+1),-k1];
    r=roots(c);
    r=sort(r);
    omega1(nk,n)=r(1); %inertial-gravity, negative frequency
    omega2(nk,n)=r(2); %rossby
    omega3(nk,n)=r(3); %inertial-gravity, positive frequency
end
end
omn=0; omx=3;
% lhandle=plot([0 0],[omn omx],'k:',k,o_mx1,'k',k,o_kelvin,'b',k,omega2,'r',k,omega3,'k')
color
lhandle=plot([0 0],[omn omx],'k:',k,o_mx1,'k.',k,o_kelvin,'k',k,omega2,'k',k,omega3,'k:', 'linewidth',

axis([-5 5 omn omx])
h=title('赤道波動の分散関係'); ; set(h,'FontSize',14)
h=xlabel('波数'); set(h,'FontSize',12)
h=ylabel('角周波数'); ; set(h,'FontSize',12)

h=xlabel('Nondimensional Wave Number'); set(h,'FontSize',12)
h=ylabel('Nondimensional Frequency'); ; set(h,'FontSize',12)

```

6.5.2 エルミート関数と赤道波の南北構造の描画

```

y=(-5:0.1:5)';
hp(:,1)=ones(size(y)); %hp(:,n)->n-1 次のエルミート多項式に対応
hp(:,2)=2.*y;
hp(:,3)=4*y.^2-2;
hp(:,4)=8*y.^3-12*y;
hp(:,5)=16*y.^4-48*y.^2+12;
expf=exp(-y.^2/2);
fact1=1/sqrt(2*sqrt(pi));
for n=1:5
    fact=1/sqrt(2^(n-1)*gamma(n)*sqrt(pi))
    hf(:,n)=hp(:,n).*expf*fact; %hf(:,n)->n-1 次のエルミート関数 (正規化済み)
end
plot(y,hf(:,1),'k',y,hf(:,2),'g',y,hf(:,5),'k.', 'Linewidth',2)
legend('1st mode','2nd mode','5th mode')
h=title('Hermit Functions'); set(h,'FontSize',14);
xlabel('y');

subplot(2,2,1)
plot(y,hf(:,1),'k','LineWidth',2); axis([-5 5 -1.2 1])
xlabel('y'); ylabel('amp. ');
legend('u & h');
title('Kelvin')

```

```
for n=2:4
    mod=n-1;
    v(:,n)=hf(:,n);
    u(:,n)=1/sqrt(mod+1)*hf(:,n+1)-1/sqrt(mod)*hf(:,n-1);
    p(:,n)=1/sqrt(mod+1)*hf(:,n+1)+1/sqrt(mod)*hf(:,n-1);
    subplot(2,2,n)
    plot(y,v(:,n),'k',y,u(:,n),'k.',y,p(:,n),'g','LineWidth',2); axis([-5 5 -1.2 1])
    xlabel('y'); ylabel('amp. ');
    if (n==2); legend('v','u','p'); end
    if (n==2); title('1st Rossby'); end
    if (n==3); title('2nd Rossby'); end
    if (n==4); title('3rd Rossby'); end
end
```


第7章 海洋風成循環

この節では、黒潮や湾流が流れる主要なメカニズムである風成循環(*wind circulation*)について、その基礎を説明しよう。なお風成循環以外の海洋の循環には、熱や塩で駆動される熱塩循環がある。

7.1 スウェルドラップ・バランス*

海洋に強い流れが生じているのは、黒潮や湾流などのごく限られた場所である。それ以外の場所では、流れの速度は弱い。一般に流れが強いと非線形性や摩擦が利くので複雑になるが、流れが弱くてこれらの効果を無視できるなら、簡潔な法則に従う。こういう領域を、海洋内部領域(*ocean interior*)と言う。まずどういう場合に、海洋内部領域として扱うことができるのかを検討しよう。以下の東西方向の運動方程式の左辺のスケーリングを行う。

$$u_t + uu_x + vv_y - fv = -p_x/\rho_0 + \nu \nabla_h^2 u - ru + \tau^x/(\rho_0 H)$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \Omega U$$

ここで $\nu \nabla_h^2 u$ は水平摩擦を、 ru は底摩擦すなわち鉛直摩擦を表している。環境では2番目が `textstyle` になってしまうので、要改善

左辺第一項とコリオリ項の比は、時間に関するロスビー数 $1/(T\Omega)$ である。また非線形項とコリオリ項の比が(非線形項に関する)ロスビー数(*Rossby number*) $U/(\Omega L)$ である。時間変化項と非線形項が無視できるのは、ロスビー数と時間に関するロスビー数とがともに1よりもずっと小さい場合である。

この場合には運動方程式は

$$-fv = -\frac{p_x}{\rho_0} + \frac{\tau^x}{\rho_0 H} \quad (7.1)$$

同様にして

$$fu = -\frac{p_y}{\rho_0} + \frac{\tau^y}{\rho_0 H} \quad (7.2)$$

となる。

一方連続の式で拡散・減衰項を無視すると

$$h_t = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) \right]$$

水深 H が一様でかつ定常とすると、

$$u_x + v_y = 0 \quad (7.3)$$

と非発散の式となる。

(7.1)(7.2) から p を消去しよう。すなわちこれら2式をクロス微分 (∂_x (7.2) - ∂_y (7.1)) して非発散の関係を使うと、

$$\beta v = \frac{\tau_x^y - \tau_y^x}{\rho_0 H} = \frac{\text{curl}(\vec{\tau})}{\rho_0 H} \quad (7.4)$$

となる．ここで $\tau_x^y - \tau_y^x \equiv \text{curl}(\vec{\tau})$ である．また質量輸送量 $V \equiv v\rho_0 H$ を定義すれば，上式は

$$\beta V = \text{curl}(\vec{\tau}) \quad (7.5)$$

となる．(??) もしくは (7.5) をスウェルドラップ・バランス (平衡) *Sverdrup Balance* と呼ぶ．証明は割愛するが、連続成層下でも南北質量輸送量は *Sverdrup Balance* で与えられることが証明できる．

一般に中緯度では東向きの偏西風が吹き低緯度では西向きの貿易風が吹いている．従って，偏西風と貿易風の間領域は $\text{curl}(\vec{\tau}) < 0$ であり，スウェルドラップ・バランスによる流れは南に向かう．この南向き流を補償する北向き流が，どこかに生じなくてはならない．ここでは (7.1)(7.2) で保持した以外の項が必要であり（そうでないならやはり南向きにしか流れない），そのためには流れが強くなってはならない．流れが強い補償流は広い範囲では生じられないため，西岸か東岸の境界に沿って生じることが期待される．

なお，西岸・東岸というのは，海の西・東の境界で，それぞれ陸に西側・東側に相当する．たとえば，太平洋の東岸 (eastern boundary) は，大陸の西岸 (west coast) である．どちらも「岸」という漢字を当てているので混乱しやすいが，文脈を注意して見分けるようにしよう．

7.2 西岸境界流*

7.2.1 ストンメル層*

西岸もしくは東岸に生じるであろう，境界層では底摩擦が利くとしよう．底摩擦を水平摩擦よりも先に取り上げるのは，微分がない底摩擦の方が，2階微分で表される水平摩擦よりも扱いが容易なためである．

境界層内では，南北流速が強いので，以下の式が成り立つと過程する．

$$\begin{aligned} -fv &= -\frac{p_x}{\rho_0} + \frac{\tau^x}{\rho_0 H} \\ fu &= -\frac{p_y}{\rho_0} - rv + \frac{\tau^y}{\rho_0 H} \end{aligned}$$

クロス微分して非発散を用いると，

$$+\beta v = -rv_x + \frac{\text{curl}(t\vec{a}u)}{\rho_0 H} \quad (7.6)$$

である．右辺の第二項は，スウェルドラップ・バランスに対応し，境界層ならではの応答は右辺第一項で表現される．この式を，内部領域のスウェルドラップ・バランスの解 (??) に滑らかに接続するように解かなくてはならない．すなわち，境界条件は $x \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow \text{curl}(t\vec{a}u)/(\rho_0 H)$ である．この非同次境界条件の元で (7.6) を解くには，

$$v = v' + \text{curl}(t\vec{a}u)/(\rho_0 H) \quad (7.7)$$

という新たな変数 v' を導入すると便利である．この変数については境界条件は単に， $v' \rightarrow 0$ となる．上式を (7.6) に代入すると，

$$+\beta v' = -r \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (7.8)$$

となる．この方程式の一般解は

$$v' = v'_0 \exp\left(-\frac{\beta}{r}x\right)$$

と，東に向かって減衰する解となる．この場合もちろん，境界は西岸になくなくてはならない．すなわち，西岸境界 (western boundary) であり，そこを流れる海流を西岸境界流 (western boundary current) と呼ぶ．黒潮や湾流は西岸境界流である．元々の変数である v についての解は，

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\beta}{r}x\right) + \frac{1}{\rho_0 H} \text{curl}(\vec{\tau}) \quad (7.9)$$

となる． v_0 の大きさは、各々の緯度での南北流速 v の東西全領域での積分がゼロになるように決める．これがストンメルの解 (*Stommel solution*) で，この解で示される西岸境界層がストンメルの層 (*Stommel layer*) である．

7.2.2 ムンク層**

底摩擦が重要であるとするストンメル解は、どちらかという数学的に簡単だということが便利であったのではないかと思う。しかし西岸境界流の最大速度が西岸に生ずるという、現実的ではない点もあった。そこで水平粘性が重要役割を果たすのではないかと、という考えが当然出てくる。水平粘性が利くのであれば、境界で境界に沿う方向の流速はゼロになるのだ。これを扱ったのが、ウォルター・ムンクで、彼は1999年に京都賞も受賞しその際には北大理学部で当時大学院生の某H氏が案内したというように、日本にもなじみのある方である。

出発方程式は

$$\begin{aligned} -fv &= -\frac{p_x}{\rho_0} + \frac{\tau^x}{\rho_0 H} \\ fu &= -\frac{p_y}{\rho_0} + \nu v_{xx} + \frac{\tau^y}{\rho_0 H} \end{aligned}$$

で、例によってクロス微分して非発散を使うと

$$\beta v = +\nu v_{xxx} + \frac{\text{curl}(\vec{\tau})}{\rho_0 H}$$

で境界条件は内部領域でスウェルドラップ・バランスになるという、ストンメル解と同じである。よって、ストンメル解と同様に(7.7)で変数 v' を導入し、同次境界条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} v' \rightarrow 0$ が使えるようにすると、解くべき微分方程式は

$$\beta v' = +\nu v'_{xxx}$$

となる。これは3階なのでちょっと面倒だけれど、しょせん線形同次常微分方程式なのですぐに解ける。 $v' = \exp(\lambda x)$ という解を仮定して代入すると、

$$\lambda^3 - \nu/\beta = 0$$

となる。因数分解すると、簡単のために

$$L_M \equiv (\beta/\nu)^{1/3} \tag{7.10}$$

およびその逆数

$$I_M \equiv (\nu/\beta)^{1/3} \tag{7.11}$$

を使って

$$[\lambda - I_M][\lambda^2 + I_M \lambda + I_M^2] = 0$$

となる。最初の方カッコは $v' \sim \exp(L_M x)$ に対応して、東岸の境界層を表す。この東岸境界層の流れは、詳しく調べると内部領域と同じ向きの流れとなるので、内部領域の補償流としての役割は持たない。後の方カッコを二次方程式の解の公式に代入すると

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-I_M \pm \sqrt{I_M^2 - 4I_M^2}}{2} \\ &= \frac{-I_M \pm i\sqrt{3}I_M}{2} \end{aligned}$$

となる。これに対応する解は

$$\begin{aligned} v' &= a \exp(-I_M x/2) (\cos(I_M \sqrt{3}x/2) + i \sin(I_M \sqrt{3}x/2)) \\ &= b \exp(-I_M x/2) (\cos(I_M \sqrt{3}x/2) - i \sin(I_M \sqrt{3}x/2)) \end{aligned}$$

となる。ここで境界条件を満たすために、 $a = -v'_0 i/2, b = v'_0 i/2$ と置くと、

$$v' = v_0 \exp(-I_M x/2) (\sin(I_M \sqrt{3}x/2))$$

という西岸境界層の解が得られる．この境界層をムンク層(*Munk layer*)と呼ぶ． L_M がムンク層の厚さを規定するパラメータである．

なおここでは簡単のために v の方程式を，西岸付近の解を解くためだけに用いたが，閉じた海全体の解は求めることもできる (Vallis 2006)．

7.3 Island Rule**

島をめぐる風成循環によって生ずる海洋循環の流量を簡単に推定できる Godfrey の *Island Rule* は，1986年の提案以来多くの注目を集めて来た．本来は3次元の原始方程式を鉛直積分することで導かれたが，本質は1層流体で表現できる．今回の1層流体の出発方程式は定常の運動方程式で，圧力項，コリオリ項，風応力項を顕に扱い，それ以外の粘性項，非線形項は残差 (residual) に含まれるものとする．一般に，西岸境界領域では残差が大きく，それ以外の領域では無視できると考えられる．支配方程式は，

$$-fv = -p_x + \tau^x / (\rho_0 H) + R^x \quad (7.12)$$

$$+fu = -p_y + \tau^y / (\rho_0 H) + R^y \quad (7.13)$$

である．以下では簡単のために， $\tau^* = \tau^x / (\rho_0 H)$ と $\rho_0 H$ を含んだ τ^* を導入し，* なしに表記する．

この方程式を島を含む一周積分を行う．ここで，積分経路は西岸境界領域に入らないように，すなわち内部領域のみを通るように選んでおくと，スウェルドラップ・バランスの導出同様，残差項を無視することができる．まず簡単のために，矩形の島，矩形の海洋で考えよう．より一般的な地形でも本質は変わらない．積分経路 AB では

$$\begin{aligned} -\int_A^B f v dx &= -\int_A^B p_x dx + \int_A^B \tau^x dx \\ +\int_B^C f u dy &= -\int_B^C p_y dy + \int_B^C \tau^y dy \\ -\int_C^D f v dx &= -\int_C^D p_x dx + \int_C^D \tau^x dx \\ +\int_D^A f u dy &= -\int_D^A p_y dy + \int_D^A \tau^y dy \end{aligned}$$

ここで経路 BC DE は岸に沿っているので，岸に直行する流速 u はゼロとなる．また，経路 AB CD ではコリオリパラメータは一定値を取る ($f_S f_N$ と書く) ので，積分の外に出せる．また質量保存から，積分区間 AB と CD の流量は等しくなくてはならず，これを V と書く．したがって上の4式は，

$$\begin{aligned} -f_S V &= -\int_A^B p_x dx + \int_A^B \tau^x dx \\ 0 &= -\int_B^C p_y dy + \int_B^C \tau^y dy \\ +f_N V &= -\int_C^D p_x dx + \int_C^D \tau^x dx \\ 0 &= -\int_D^A p_y dy + \int_D^A \tau^y dy \end{aligned}$$

となる．これらを辺々加えよう．まず，圧力微分項の一周積分は，

$$\begin{aligned} &\int_A^B p_x dx + \int_B^C p_y dy + \int_C^D p_x dx + \int_D^A p_y dy \\ &= p(B) - p(A) - p(C) - p(B) - p(D) - p(C) - p(A) - p(D) \\ &= 0 \end{aligned}$$

とゼロになる．よって，

$$(f_N - f_S)V = \oint \vec{\tau} d\vec{l} \quad (7.14)$$

が得られる．

$$V = \frac{\oint \vec{\tau} d\vec{l}}{(f_N - f_S)} \quad (7.15)$$

となり，島の東側を通過する流量が求まる．

一般的な地形の場合でも本質は変わらず，出発方程式をベクトル表記で記し，

$$-f\vec{k} \times \vec{v} = -\nabla p + \vec{\tau} + \vec{R} \quad (7.16)$$

を，内部領域のみを通る図のような経路で一周積分すれば，7.15 と同一の結果が得られる．これが Island Rule である．

第8章 鉛直モード展開

3次元の支配方程式も、底が平らで成層が水平一様、さらに線形であるなら、鉛直方向と水平方向とを変数分離することができ、その結果得られる鉛直方向の構造を鉛直モードと呼ぶ。同時に得られる個々のモードについての、水平・時間方向の支配方程式は次の3変数・3式の浅水方程式系である。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t^n - f\tilde{v}^n &= -\tilde{p}_x^n \\ \tilde{v}_t^n + f\tilde{u}^n &= -\tilde{p}_y^n \\ (c^n)^2\tilde{p}_t^n + \tilde{u}_x^n + \tilde{v}_y^n &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

ここで n は、第 n 鉛直モードについての式であることを表している。 c^n は浅水方程式の性質から、重力波の速度でありこれはこの節で示すように、鉛直方向の構造についてのスツルム・リュースル型の固有値問題として求まる（正確には $1/c^{n2}$ もしくは、 c^{n2} ）が固有値として得られる。また、実際の流れは、これらのモードの合成として表現され、連続成層の場合は、

$$(u, v, p/\rho_0)(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t) F^n(z) \quad (8.2)$$

層モデルの場合であれば、

$$(u_k, v_k, p_k/\rho_0)(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t) F_k^n \quad (8.3)$$

となる。このような表現が可能であるということは流体運動を理解する上で非常に重要なポイントであり、浅水方程式系は3次元の流れの理解の基礎となるものである。

なお、鉛直方向の成層が一様（ z によらない）場合は、予想されるように鉛直方向の構造関数は三角関数（ \sin, \cos ）となる。鉛直方向に成層が変化する場合には、もはや三角関数で扱うことはできない。

8.1 非粘性連続成層での鉛直モード展開 **

この節では、非粘性連続成層における鉛直モードを導出しよう。出発する方程式系は、線形非粘性の次の支配方程式である。

$$u_t - fv = -p_x/\rho_0 \quad (8.4)$$

$$v_t + fu = -p_y/\rho_0 \quad (8.5)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned}\rho_t &= -w\bar{\rho}_z \\ p_z &= -\rho g\end{aligned}$$

最後の2式はまとめて

$$p_{zt} = -\rho_t g = wg\bar{\rho}_z \quad (8.7)$$

として ρ を消去する．この後使うのは (8.4)(8.5)(8.6)(8.7)

境界条件は，

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = -H \quad (8.8)$$

$$\rho = 0 \quad \text{at } z = 0 \text{ and } z = -H \quad (8.9)$$

とする．ここで $w(z=0) = 0$ は鍋蓋近似 (ligid rid approximation) であり，物理的には重力波の速度を無限大にしていることに対応しており，大規模場の研究ではよい近似である． $w(z=-H) = 0$ は底で速度がゼロを意味しており，底が平らである場合に妥当である．一方地形がある場合には，この近似は妥当ではない¹

この方程式系には，水平・鉛直の摩擦・粘性項は含まれていない．水平摩擦・粘性項を含めても，以下の手続きと全く同じように鉛直モード展開できる．鉛直摩擦項を含めると，特別な扱いが必要となるが，それほど悪くない仮定の下で鉛直モード展開が可能である．なお，非線型項を含めることは不可能である．一般にモード展開は，線形重ねあわせで表現されるものであり，線形重ねあわせではそもそも非線型を扱い得ない．

次に支配方程式で，鉛直方向に変数分離できると仮定しよう．運動方程式から， u, v, p については同じ鉛直方向の構造関数を持つことが明らかで，すなわち，

$$(u, v, p)(x, y, z, t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}\rho_0)(x, y, t)F(z) \quad (8.10)$$

また w についても鉛直方向の構造関数を導入して

$$w(x, y, z, t) = \tilde{w}(x, y, t)G(z) \quad (8.11)$$

となる．

まず，連続の式から，

$$(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)F + \tilde{w}G_z = 0 \quad (8.12)$$

が得られる．次に (8.7) から，

$$\tilde{p}_t\rho_0 F_z = \tilde{w}Gg\bar{\rho}_z \quad (8.13)$$

である．そこで，(8.12) を鉛直微分して (8.13) を代入すると，

$$(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)F_z + \tilde{w}G_{zz} = (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)F_z + \tilde{p}_t \frac{G_{zz}F_z\rho_0}{Gg\bar{\rho}_z} = 0 \quad (8.14)$$

共通因数となっている F_z を除き，バイサラ振動数 $N^2 = -g\bar{\rho}_z/\rho_0$ を用いれば，上式は，

$$(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) - \tilde{p}_t \frac{G_{zz}}{GN^2} = 0 \quad (8.15)$$

である．この式を変数分離形

$$\frac{\tilde{u}_x + \tilde{v}_y}{\tilde{p}} = \frac{G_{zz}}{GN^2} = -\lambda \quad (8.16)$$

¹最近，細かい海底地形がある場合には，海底地形に大規模場の流れが追従することができず，bottom decoupling が生じ，海底での境界条件が $w_z(z=-H) = 0$ が妥当であるということが提案されている．この場合，鉛直モードの構造も変わる．簡単に言えば， $w = 0$ では底が固定端の場合に対応し， $w_z = 0$ は底が開放端の場合に対応する．後者の方が鉛直方向のスケールが長くなり，速度も速くなる．

p であらわせば、水平・時間方向の依存性を記述する

$$\lambda \tilde{p}_t + (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) = 0 \quad (8.17)$$

と、鉛直方向の構造を記述する

$$G_{zz} + \lambda N^2 G = 0 \quad (8.18)$$

とが得られる． G の境界条件は w の境界条件である (8.8) から

$$G = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, -H \quad (8.19)$$

であるので、この境界条件と (8.18) とは、典型的なスツルム・リュービル固有値問題を構成する．したがって、 λ は固有値であって、飛び飛びの値 λ_n を取る．スツルム・リュービル固有値問題では、興味深い性質がいくつも知られており、例えば固有値は λ_n 実数であり、最小値が存在する．また、直行条件は、重み関数 N^2 が G に付いているので、 $\int_{-H}^0 N^2(z) G_n(z) G_m(z) dz = 0$ である²．

構造関数 F については、連続の式から $F \propto G_z$ が成り立つことが明らかである．(8.18) に代入すれば、

$$F_z + N^2 \int_{-H}^z \lambda F dz = 0 \quad (8.20)$$

これから

$$\left(\frac{1}{N^2} F_z \right)_z + \lambda F = 0 \quad (8.21)$$

となる．この式もまたスツルム・リュービル型の方程式であり、 F に変数係数（重み関数）がついていないことから、第 n, m モードの構造関数 F_n と F_m と自体が直行する．

$$\int_{-H}^0 F_n F_m dz = 0, \quad \text{for } n \neq m \quad (8.22)$$

運動方程式 (8.4)(8.5) を $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ を用いて書き直すのは容易であり、

$$\tilde{u}_t - f \tilde{v} = -\tilde{p}_x \quad (8.23)$$

$$\tilde{v}_t + f \tilde{u} = -\tilde{p}_y \quad (8.24)$$

となる．この2式と (8.17) とを合わせた3式からなる方程式系水平・時間方向の支配方程式系であり、浅水方程式系と本質的に同じ形をしている．そこで、浅水波動の知識から、固有値 λ_n は第 n モードの重力波の速度を c_n とすると、

$$\lambda_n = 1/c_n^2 \quad (8.25)$$

との関係を持つ．前述の固有値には最小値が存在するので、伝播速度には最大値（上限）が存在する．通常 c_n が大きいほうから小さい方に、第一モード・第二モード・... と呼ぶ．

鉛直モード展開によって、3次元の運動の水平・時間発展は浅水方程式系に帰着するという事は、目覚ましい特徴である．この特徴から浅水方程式系は、単に1層・1.5層モデルにとどまらず、広い有用性を有し大規模運動の理解の基礎と位置付けられる．

なお、表面の密度変化がゼロというのは現実的ではなく、表面の加熱・冷却による応答を表現することができないという制約となる．したがって、多くの場合に鉛直モード展開は、表面からの密度フラックスの入力に対する現象には利用できず、表面からの運動量フラックスに対する現象に利用する．

²一般的なスツルム・リュービル問題は、 $(p(x)u_x)_x - q(x) + \lambda \rho(x)u = 0$ である．ここで p, q, ρ は変数係数である．重み関数 ρ について、直行する ($\int_a^b \rho u_n u_m dx = 0$) ことは、及川 (1997) p. 198 に証明が与えられている．

8.1.1 一様成層の場合

成層が一定, すなわち $N = \text{const}$ の場合は, 当然ながら鉛直モードの構造は \sin, \cos で記述される. (8.18) から,

$$G = \sin(\sqrt{\lambda} Nz)$$

である. G の境界条件は (8.19) であるから,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{NH}$$

となる. 重力波の伝播速度は (8.25) で与えられるので,

$$c = \frac{1}{\lambda} = \frac{NH}{n\pi} \quad (8.26)$$

である. なお, 一様成層の場合のロスビーの変形半径は,

$$L_d = \frac{NH}{nf} \quad (8.27)$$

で定義される. 浅水方程式のロスビーの変形半径は, 伝播速度をコリオリ・パラメーターで割ったものであって, もしそうするとここでは $\frac{NH}{nf\pi}$ となるけれど, その分母の π はさほど本質的ではないので, 省かれている.

8.1.2 鉛直モード展開への風応力の導入 ***

前節の鉛直モード展開に, 表面風応力が働く場合にどう表されるかを考えよう. まず, 運動方程式 (8.4) に, 風応力の効果を入れよう. この場合は次節と異なり鉛直粘性が考慮されていないので, 風応力は厚さ H_m の混合層に一応に分布するとしよう. このように表現される力を, 体積力 (*body force*) という. すなわち

$$u_t - fv + p_x/\rho_0 = \begin{cases} \frac{\tau^x}{\rho_0 H_m}, & \text{for } -H_m < z < 0 \\ 0 & \text{for } z < -H_m \end{cases}$$

である. 一般に固有関数は, 方程式の同次部分にのみよって決まり, 非同次項である外力はその固有関数で展開するだけである. 従って, 前節の固有関数で

$$(u, v, p/\rho_0)(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t) F_n(z)$$

と展開しよう. すなわち,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{u}_{nt} - f\tilde{v}_n + \tilde{p}_{nx}) F_n = \begin{cases} \frac{\tau^x}{\rho_0 H_m}, & \text{for } -H_m < z < 0 \\ 0 & \text{for } z < -H_m \end{cases}$$

これに, 辺々 F_k をかけて, z を $(-H, 0)$ で積分すると,

$$\tilde{u}_{kt} - f\tilde{v}_k + \tilde{p}_{kx} = \tau_k^x \equiv \int_{-H_m}^0 \frac{\tau^x}{\rho_0 H_m} F_k dz$$

となる. ただしここで $\int_{-H}^0 F_k^2 dz = 1$ を用いている. また右辺の積分範囲が $-H_m$ からとなっているのは, $(-H < z < -H_m)$ で風応力がゼロだからである. 結局風応力を考慮すると, 鉛直モード展開された方程式は

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} - f\tilde{v}_n + \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial x} = \tau_n^x \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} + f\tilde{u}_n + \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial y} = \tau_n^y \quad (8.29)$$

$$\frac{1}{c_n^2} \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial y} \right) = 0 \quad (8.30)$$

となる.

8.2 鉛直モード展開への鉛直粘性・拡散係数の導入 ***

鉛直拡散・粘性係数を，鉛直モード展開に導入するには，第一感では係数を定数とするのが良さそうである．しかし実は，そうするとうまくいかない．これがうまく行かないのは，簡単に確認できる．運動方程式に鉛直粘性を加えて，

$$u_t - fv + p_x/\rho_0 = (\nu u_z)_z \quad (8.31)$$

となる．境界条件は

$$\nu u_z = \tau^x, \quad \nu v_z = \tau^y \quad \text{at } z = 0 \quad (8.32)$$

$$\nu u_z = 0, \quad \nu v_z = 0 \quad \text{at } z = -H$$

である．ここで，非粘性の鉛直モード展開と同様に，

$$(u, v, p/\rho_0)(x, y, z, t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t)F(z) \quad (8.33)$$

として， ν が定数であるとする

$$\left(\tilde{u}_t - \tilde{f}\tilde{v} + \tilde{p}_x\right) F = \nu \tilde{u} F_{zz}$$

これが成立するためには， $F = F_{zz}$ でなければならないが，非粘性の鉛直モード展開では，(8.21) の関係があるためにそうはならない．結局上式が成立し得るのは， N が一定の場合でしかなく，現実的な成層には適用できない．

どうすれば鉛直拡散・粘性付の問題を鉛直モード展開できるかに回答を与えたのは，McCreary (1982) である．彼は，鉛直拡散係数と粘性係数を， $A/N^2(z)$ の形で置くことを提案した．ここで A は定数である．すなわち，(8.31) に代えて，

$$u_t - fv + p_x/\rho_0 = (\nu u)_z = A (u_z/N^2)_z \quad (8.34)$$

である．この式を構造関数 F_n を用いて展開しよう．すなわち，辺々 F_n をかけて $(-H, 0)$ の区間で積分する．左辺は前の節と変わらないので，問題は右辺である．右辺の積分は

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_{-H}^0 (\nu u)_z F_n dz \\ &= [(\nu u)_z F_n]_{-H}^0 - \int_{-H}^0 \nu u_z F_n z dz \\ &= \tau^x F_n(0) - \int_{-H}^0 A u_z \frac{F_n z}{N^2} dz \end{aligned}$$

となる．1段目から2段目へは，境界条件 (8.32) を用い， ν を置き換えている．さらに部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \tau^x F_n(0) - \left[A u \frac{F_n z}{N^2} \right]_{-H}^0 + \int_{-H}^0 A u \left(\frac{F_n z}{N^2} \right)_z dz \\ &= \tau^x F_n(0) + \int_{-H}^0 \frac{A}{c_n^2} u F_n dz \\ &= \tau^x F_n(0) + \frac{A}{c_n^2} u_n \end{aligned}$$

となる．ここで2行目の変形には (8.21) を用いた．

結局東西方向の運動方程式を鉛直モード展開すると，

$$\frac{A}{c_n^2} \tilde{u} + \tilde{u}_t - \tilde{f}\tilde{v} + \tilde{p}_x = \tau^x F(0) \quad (8.35)$$

となる．

次に，密度の方程式にも鉛直粘性を導入しよう．この場合は McCreary は，

$$\rho_t - g^{-1} N^2 w = A(\rho/N^2)_{zz} \quad (8.36)$$

とした．密度変化についての鉛直方向の構造関数は， w の構造関数である G を用いて，上式から $\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}N^2G/g$ と表されなくてはならない．これを上式に代入すれば，

$$(\bar{\rho}_t - w)g^{-1}N^2 = AgG_{zz} \quad (8.37)$$

である．前の節で導入された， $G_{zz} + \lambda N^2G = 0$ という関係を用いて，上の式が成立することが見て取れる．後は非粘性の場合と同様な手続きによって，次の支配方程式系が得られる．

まとめると，鉛直粘性係数を考慮して鉛直モード展開を行えば，

$$\begin{aligned} \frac{A}{c^n} \tilde{u} + \tilde{u}_t - f\tilde{v} + \tilde{p}_x &= \tau_n^x \\ \frac{A}{c^n} \tilde{v} + \tilde{v}_t + f\tilde{u} + \tilde{p}_y &= \tau_n^y \\ \frac{A}{c^n} \tilde{p} + \tilde{p}_t + \tilde{u}_x + \tilde{v}_y &= 0 \end{aligned} \quad (8.38)$$

となる．ここで

$$\tau_n^x \equiv \tau^x F(0), \tau_n^y \equiv \tau^y F(0), \quad (8.39)$$

である．

定数係数だと鉛直微分が邪魔をして，鉛直モード展開できないのであれば，その係数をうまく調整して，鉛直モード展開できるようにすれば良い．ということは，言われてみればなるほどと思えるだろうし，鉛直拡散・粘性係数をどのように鉛直方向に変化する関数とすれば良いかを決定するのも，それほど難しくくない．McCreary が偉いのは，これを 1982 年に独力でやり，さらにそれで赤道潜流のメカニズムを綺麗に説明したことである．

なお，鉛直拡散や粘性が N^2 に反比例するというのは，それほど悪い仮定ではない． N が大きいということは成層が強く，上下に混ざりづらいということなので，その際に鉛直拡散係数が小さくなるのは理にかなっている．また，この理論的な要請から，どちらかといえばいい加減に決めた鉛直拡散係数の形は，その後の赤道での乱流直接観測からそれなりに妥当であることが示された．この一致はしかし，偶然と言うべきであろう．

8.3 鉛直モード展開の計算方法**

鉛直モードを求めるには，次のスツルムリューベル問題

$$G_{zz} = -\lambda GN^2 \quad (8.40)$$

$$G = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad z = -H \quad (8.41)$$

を求めれば良い．固有関数 G が求めれば，固有関数 F も

$$-\lambda F = G_z \quad (8.42)$$

もしくは

$$F_z = GN^2 \quad (8.43)$$

の関係から求めることができる（3）よりは（4）を用いる方が， F を密度の観測点と同じ深さにおくようグリッドを設定することが楽にできる（下図参照）．ただし（4）を用いると固有関数 F の相対値しか定まらないので，絶対値を求めるためには，

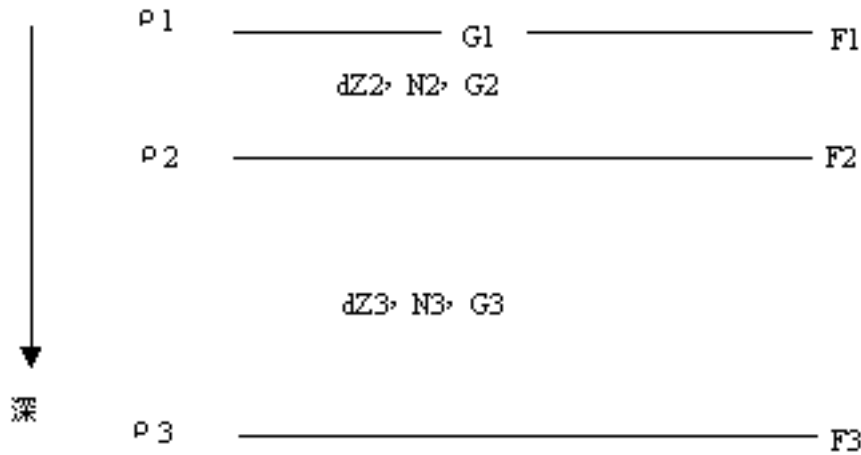


図 8.1: 固有値展開をするためのグリッド配置 .

$$\begin{aligned}
 u_t - fv &= -p_x / \rho_0 \\
 v_t + fu &= -p_y / \rho_0 \\
 u_x + v_y + w_z &= 0 \\
 \rho_t &= -w \bar{\rho}_z \\
 p_t &= -\rho g
 \end{aligned}$$

図 8.2: vertical mode1

$$\int_{-H}^0 F dz = 0 \tag{8.44}$$

を用いる必要がある .

8.4 2層モデルにおける鉛直モード*

底が平らな流体に静水圧近似とブジネスク近似を用いた層モデルでの支配方程式は次の通り

$$u_{nt} - fv_n + p_{nx} / \rho_0 = 0 \tag{8.45}$$

$$v_{nt} - fu_n + p_{ny} / \rho_0 = 0 \tag{8.46}$$

$$h_{nt} + H_n(u_{nx} + v_{ny}) = 0 \tag{8.47}$$

ここで下付き添え字 n は, 第 n 層であることを現し, $n = 1, 2$ のいずれかである . 表面および境界面の静止状態からのずれを, 表面 η_0 および境界面 η_1 と定義する .

$$\eta_1 = h_2 - H_2 \tag{8.48}$$

$$\eta_0 = h_1 + h_2 - H_1 - H_2 \tag{8.49}$$

$$\rho', G \bar{\rho}_z = -w' G \bar{\rho}_z$$

図 8.3: vertical mode2

(8.47) に (8.48)(8.49) を用いて ,

$$\eta_{1t} = -(u_{2x} + v_{2y})H_2 \quad (8.50)$$

$$\eta_{0t} = -(u_{1x} + v_{1y})H_1 - (u_{2x} + v_{2y})H_2 \quad (8.51)$$

である . n 層目の圧力とその上層の圧力との差は , 静水圧バランスから

$$p_n = p_{n-1} + g\eta_{n-1}\Delta\rho_{n-1}, \quad \Delta\rho_{n-1} \equiv \rho_n - \rho_{n-1} \quad (8.52)$$

で与えられる . ただし , 第一層目の密度については , 大気密度 ρ_a と圧力 p_a を共にゼロとして ,

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_a = \rho_1 \approx \rho_0 \quad (8.53)$$

である . ここで , ρ_0 は水の代表密度である . したがって , 第 1 層の圧力と第二層の圧力とは , それぞれ次のように表される .

$$p_1 = g\eta_0\rho_0 \quad (8.54)$$

$$p_n = g\eta_0\rho_0 + g\eta_1\Delta\rho_1 \quad (8.55)$$

(8.50)(8.51) と (8.54)(8.55) から

$$p_{1t} = g\eta_{0t}\rho_0 = -g\rho_0 \{(u_{1x} + v_{1y})H_1 + (u_{2x} + v_{2y})H_2\} \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} p_{2t} &= p_{1t} + g\eta_{1t}\Delta\rho_1 \\ &= -g\rho_0 \{(u_{1x} + v_{1y})H_1 + (u_{2x} + v_{2y})H_2\} - g\Delta\rho_1(u_{2x} + v_{2y})H_2 \end{aligned} \quad (8.57)$$

である . 以上で (8.45)(8.46)(8.56)(8.57) から , u, v, p のみの方程式系 (3×2 層) が得られた .

ある鉛直モードの n 層目における構造関数を , F_n としよう . 構造関数とは , そのモードによる変動が ,

$$(u_n, v_n, p_n/\rho_0)(x, y, t) = F_n(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t) (n = 1, 2) \quad (8.58)$$

と表されるというものである . すると運動方程式である (8.45)(8.46) のモード展開は容易に得られることが見て取れる . 一方 , (8.56)(8.57) は構造関数を用いて書き直すと ,

$$\tilde{p}_t\rho_0 F_1 = -g\rho_0 \{F_1 H_1 + F_2 H_2\} (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) \quad (8.59)$$

$$\tilde{p}_t\rho_0 F_2 = [-g\rho_0 \{F_1 H_1 + F_2 H_2\} - g\Delta\rho_1 F_2 H_2] (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) \quad (8.60)$$

である . これを変数分離形で表現すると ,

$$\frac{\tilde{p}_t}{-(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)} = \lambda = \frac{g(F_1 H_1 + F_2 H_2)}{F_1} = \frac{g(F_1 H_1 + F_2 H_2) + g' F_2 H_2}{F_2} \quad (8.61)$$

となる . ただしここで , $H = H_1 + H_2$, $g' \equiv g\Delta\rho/\rho_0$ を用いた . 分離定数の符号は $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ の式 (連続の式) が浅水方程式とおなじ符号関係になるように設定している . 上式から ,

$$g(F_1 H_1 + F_2 H_2) = \lambda F_1 \quad (8.62)$$

$$g(F_1 H_1 + F_2 H_2) + g' F_2 H_2 = \lambda F_2 \quad (8.63)$$

である . この 2 式は固有値問題の形となっている . 行列式で書き直せば ,

$$\begin{pmatrix} gH_1 & gH_2 \\ gH_1 & gH_2 + g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

である . 固有ベクトル値を求める標準的な方法にしたがって , まず右辺を移行した次の表現 ,

$$\begin{pmatrix} -\lambda + gH_1 & gH_2 \\ gH_1 & -\lambda + gH_2 + g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.65)$$

が成り立つには、左辺の行列の行列式がゼロにならなくてはならないことを用いて、

$$\lambda^2 - \lambda \{gH + g'H_2\} + gg'H_1H_2 = 0 \quad (8.66)$$

となる．解の公式から、

$$\lambda = \frac{gH + g'H_2 \pm \sqrt{(gH + g'H_2)^2 - 4gg'H_1H_2}}{2} \quad (8.67)$$

となる．ルートの中を $\sqrt{A+a} = \sqrt{A} + a/(2\sqrt{A})$, $A \gg a$ というテーラー展開を用いて、

$$\lambda \approx gH + g'H_2, \frac{gg'H_1H_2}{gH + g'H_2} \quad (8.68)$$

が得られる．さらに $g \gg g'$ であるので、

$$\lambda \approx gH, \frac{g'H_1H_2}{H} \quad (8.69)$$

となる．

各モードの支配方程式系は、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - f\tilde{v} &= -\tilde{p}_x \\ \tilde{v}_t + fu &= -\tilde{p}_y \\ \tilde{p}_t + \lambda(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) &= 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

であって、非粘性の連続成層の鉛直モード展開と同じ結果となる．また、この方程式系と浅水方程式系における波動の知識から、固有値 λ は重力波の位相速度（群速度も同じ）の2乗 $\lambda = c^2$ であることが容易に見て取れる．

次に順圧・傾圧各モードの構造関数 F の形を調べよう．(8.65) から $(-\lambda + gH_1)F_1 + gH_2F_2 = 0$ なので、 $\lambda = gH$ を代入すると、 $F_1 = F_2$ が得られる．一方、 $\lambda = g'H_1H_2/H$ を代入すると、これは gH_1 よりはるかに小さく無視できるので、 $H_1F_1 + H_2F_2 = 0$ が成り立つ．この性質は、上層の流量と下層の流量（例えば、 u_1H_1, u_2H_2 ）とが同じ大きさで逆向きであることを意味する．

固有値が $c^2 = gH$ であるモードは順圧モード、もう一方のモードは傾圧モードと呼ばれる．主要な性質を繰り返せば、順圧モードでは上下層は同じ速度で動き、傾圧モードでは上下層は逆向きに動く．また順圧モードの重力波の伝播速度は \sqrt{gH} で、傾圧モードの重力波の伝播速度は $\sqrt{g'H_1H_2/H}$ である．各々のモードの水平方向の依存性と時間発展とは、浅水方程式に支配される．

なお、1.5層モデルとは、(8.69) 式において、 $H_1 \ll H_2$ あるいはそれと等価な $H_2 \approx H$ とおいた場合に対応している．したがって、1.5層モデルとは、下層が十分に深い傾圧モードであり、このことと1.5層モデルが無限に厚くしたがって動かない下層という仮定から直接導出されることは整合的である．

8.5 層モデルでの鉛直モード展開 **

底が平らな流体に静水圧近似とブジネスク近似を用いた、自由表面を持つ層モデルでの支配方程式は次の通り

$$u_{nt} - fv_n = -p_{nx}/\rho_0 \quad (8.71)$$

$$v_{nt} - fu_n = -p_{ny}/\rho_0 \quad (8.72)$$

$$h_{nt} + H_n(u_{nx} + v_{ny}) = 0 \quad (8.73)$$

表面 η_1 および境界面 $\eta_n (n = 2, \dots, N)$ の静止状態からのずれを、表面 η_1 および境界面 $\eta_n (n = 2, \dots, N)$ と定義する．

$$\eta_n = \sum_{k=n}^N h_k - \sum_{k=n}^N H_k \quad (8.74)$$

(8.73) から ,

$$\eta_{nt} = \sum_{k=n}^N (u_{kx} + v_{ky}) H_k \quad (8.75)$$

である . n 層目の圧力とその上層の圧力との差は , 静水圧バランスから

$$p_n = p_{n-1} + g\eta_n \Delta\rho_n, \quad \Delta\rho_n \equiv \rho_n - \rho_{n-1} \quad (8.76)$$

で与えられる . ただし , $\rho_0 = 0, p_0 = 0$ とする . さらにこれから ,

$$p_n = g \sum_{k=1}^n \eta_k \Delta\rho_k \quad (8.77)$$

が得られる . (8.75)(8.77) から

$$p_{nt} = g \sum_{k=1}^n \eta_{kt} \Delta\rho_k = g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N (u_{lx} + v_{ly}) H_l \right) \quad (8.78)$$

である . (8.71)(8.72)(8.78) から , u, v, p のみの方程式系 ($3 \times$ 層の数) が得られた .

ある鉛直モードの n 層目における構造関数を , F_n としよう . この構造関数を用いて , $(u_n, v_n, p_n/\rho_0)(x, y, t) = F_n(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x, y, t)$ と表される . すると (8.71)(8.72) のモード展開は容易に得られることが見て取れる . 一方 , (8.78) は構造関数を用いて書き直すと ,

$$\tilde{p}_t F_n = (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) \quad (8.79)$$

である . これを変数分離形とすれば ,

$$\frac{F_n}{g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right)} = \frac{(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)}{\tilde{p}_t} = -\lambda \quad (8.80)$$

となる . 分離定数にマイナスをつけているのは , $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ の式 (連続の式) が浅水方程式とおなじ符号関係になることを , 意図している . 上式から ,

$$F_n + \lambda g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) = 0 \quad (8.81)$$

である . この式は λ で割ることで , 次の固有値問題

$$g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) = -\frac{1}{\lambda} F_n \quad (8.82)$$

となる . ただし , このままではこういった直交性が存在するのか明らかではない . 固有値問題 $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ において , 行列 \mathbf{A} が正規行列³であれば , 固有ベクトルは直交するが , (8.82) では左辺を行列表示 ($\mathbf{A}\vec{F}$) しても行列 \mathbf{A} は正規行列ではない . 直交性をよりよく理解するために , 連続成層モデルとの類似から ,

$$\sum_{n=1}^N h_l F_l^n F_l^m, (n \neq m) \quad (8.83)$$

という直交性が存在する可能性を作業仮説として持とう . ここで上付き添え字はモードの番号を示している . この直交性が事実存在するなら , (8.82) は対角成分が $\sqrt{H_l}$ で与えられる対角行列 \mathbf{R} を使って , 適当な正規行列 \mathbf{B} に対して ,

$$\mathbf{B}\mathbf{R}\vec{F} = \lambda\mathbf{R}\vec{F} \quad (8.84)$$

³ $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$ を満たす行列 . 実行列の直交行列 ($\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$) , 対称行列 (${}^t \mathbf{A} = \mathbf{A}$) , 交代行列 (${}^t \mathbf{A} = -\mathbf{A}$) , 複素行列の複素行列のユニタリー行列 ($\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{E}$) , エルミット行列 ($\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$) , 交代エルミット行列 ($\mathbf{H}^* = -\mathbf{H}$) は正規行列である .

と等価であることが期待される．この式では，ベクトル $\mathbf{R}\vec{F}$ が直交するので，(8.83) が成り立つ．もし，上式が成り立つのであれば，上式に左から \mathbf{R}^{-1} をかけて得られる，

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}\vec{F} = \lambda\vec{F} \quad (8.85)$$

が (8.82) に他ならないであろう．従って，(8.82) の左辺を行列表示 ($\mathbf{A}\vec{F}$) すれば，

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} \quad (8.86)$$

が正規行列となるはずである．事実 (8.86) の操作を行えば，正規行列が得られることを以下で確認しよう．考えやすくするために，3層の場合を考える．すると (8.82) の左辺は， $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して

$$g\Delta\rho_1 \sum_{l=1}^N F_l H_l = \Delta\rho_1 (F_1 H_1 + F_2 H_2 + F_3 H_3) \quad (8.87)$$

$$\begin{aligned} & g \left(\Delta\rho_1 \sum_{l=1}^N F_l H_l + \Delta\rho_2 \sum_{l=2}^N F_l H_l \right) \\ &= g\Delta\rho_1 (F_1 H_1 + F_2 H_2 + F_3 H_3) + g\Delta\rho_2 (F_2 H_2 + F_3 H_3) \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$\begin{aligned} & g \left(\Delta\rho_1 \sum_{l=1}^N F_l H_l + \Delta\rho_2 \sum_{l=2}^N F_l H_l + \Delta\rho_3 F_3 H_3 \right) \\ &= g\Delta\rho_1 (F_1 H_1 + F_2 H_2 + F_3 H_3) + g\Delta\rho_2 (F_2 H_2 + F_3 H_3) + g\Delta\rho_3 F_3 H_3 \end{aligned} \quad (8.89)$$

となる．これを行列で表せば，

$$\mathbf{A} = g \begin{pmatrix} H_1 \Delta\rho_1 & H_2 \Delta\rho_1 & H_3 \Delta\rho_1 \\ H_1 \Delta\rho_1 & H_2 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & H_3 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) \\ H_1 \Delta\rho_1 & H_2 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & H_3 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3) \end{pmatrix} \quad (8.90)$$

である．この行列に対して (8.86) の操作を行えば，

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} &= g \begin{pmatrix} \sqrt{H_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{H_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{H_3} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} H_1 \Delta\rho_1 & H_2 \Delta\rho_1 & H_3 \Delta\rho_1 \\ H_1 \Delta\rho_1 & H_2 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & H_3 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) \\ H_1 \Delta\rho_1 & H_2 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & H_3 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{H_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{H_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{H_3} \end{pmatrix} \\ &= g \begin{pmatrix} H_1 \Delta\rho_1 & \sqrt{H_1 H_2} \Delta\rho_1 & \sqrt{H_1 H_3} \Delta\rho_1 \\ \sqrt{H_1 H_2} \Delta\rho_1 & H_2 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & \sqrt{H_2 H_3} (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) \\ \sqrt{H_1 H_3} \Delta\rho_1 & \sqrt{H_2 H_3} (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2) & H_3 (\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.91)$$

となって，たしかに \mathbf{B} が正規行列のひとつである対称行列であることが確認できた．したがって，(8.83) の直交性は3層の場合には成立し，さらに式の導出の過程から層の数がいくらであっても同様に成立することが見て取れる．

各モードの支配方程式系は，(8.71)(8.72)(8.80) から，

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - f\tilde{v} &= -\tilde{p}_x \\ \tilde{v}_t + fu &= -\tilde{p}_y \\ \lambda\tilde{p}_t + \tilde{u}_x + \tilde{v}_y &= 0 \end{aligned} \quad (8.92)$$

であって，非粘性の連続成層の鉛直モード展開と同じ結果となる．

8.6 層モデルでの鉛直モード展開 (N.5層モデル)**

前節では自由表面を持つ場合に鉛直モードを導出したが、この節では N.5 層モデルにおいて鉛直モードがどのような固有値問題で定式化されるのかを示そう。N.5 層モデルでは、最下層（無限深の層）は静止すると考えて、圧力を下層から決めていく。すなわち、浅水方程式

$$p_{n-1} = p_n - g\eta_n\Delta\rho_n, \quad \Delta\rho_n \equiv \rho_n - \rho_{n-1} \quad (8.93)$$

において、 $p_{N+1} = 0$ とする。さらにこれから、

$$p_n = -g \sum_{k=n}^{N+1} \eta_k \Delta\rho_k \quad (8.94)$$

が得られる⁴。連続の式 (8.75)(8.77) から

$$p_{nt} = -g \sum_{k=n+1}^N \eta_{kt} \Delta\rho_k = -g \sum_{k=n+1}^N \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N (u_{lx} + v_{ly}) H_l \right) \quad (8.95)$$

である。

自由表面の場合の鉛直モード展開と同様に、ある鉛直モードの n 層目における構造関数を、 F_n として上式を書き直せば、

$$\tilde{p}_t F_n = -(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) g \sum_{k=n}^{N+1} \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) \quad (8.96)$$

である。これを変数分離形とすれば、

$$\frac{F_n}{-g \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right)} = \frac{(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)}{\tilde{p}_t} = -\lambda \quad (8.97)$$

となる。分離定数にマイナスをつけているのは、自由表面の場合と同様に、連続の式の符合関係が浅水方程式とおなじにするためである。上式から、

$$F_n - \lambda g \sum_{k=n}^{N+1} \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) = 0 \quad (8.98)$$

であって、さらに λ で割ることで、次の固有値問題

$$g \sum_{k=n}^{N+1} \Delta\rho_k \left(\sum_{l=k}^N F_l H_l \right) = \frac{1}{\lambda} F_n \quad (8.99)$$

が得られる。

結局 N.5 層の鉛直モード展開も、自由表面 N 層モデルの鉛直モード展開から定式的にはわずかに異なるだけである。表に現れていないが、重要な違いは N 層モデルには順圧成分も含まれているが、N.5 層モデルでは除外されていることである。なお、連続成層の場合およびこのドキュメントでは扱っていない rigid-lid の層モデルの場合は、順圧モードは入るけれどもその伝搬速度は無限大となる。

8.7 大気の鉛直第一モード

海洋では鉛直モード展開が広く用いられるのに対して、中高緯度大気ではそれほど用いられない。気候の時間スケールでの中高緯度大気は、上から下まで同じ方向に動く等価順圧な振る舞いを示すことが多く、

⁴ η_k は k 層と $k+1$ 層の間の境界面変位と定義する

鉛直モード展開のご利益である傾圧モードが活躍しないためである。ただし熱帯大気の変動では、上下が逆方向に動く鉛直第一モードが、より重要である。このことは、エルニーニョに伴うデータ解析でも簡単に示すことができる (Fig. 8.4)。なぜ熱帯で鉛直第一モードが中高緯度よりも重要になるかということ、熱帯大気を駆動する重要な外力が、凝結に伴う潜熱放出での大気加熱であり、その大気加熱が最大値を対流圏の中央付近にあるという大気第一鉛直モードを励起するのに都合のよいプロファイルを取るためである。なお、通常鉛直第二モード以下は、ほとんど考慮されない。

熱帯大気の凝結に伴う大気加熱を含めて、第一鉛直モード応答を定式化したのは Gill (1982) であり、得られた方程式系は浅水方程式の形となった。またその研究では大気加熱がどのように大気循環によって規定されるかも示している。この節では、これらの点を紹介しよう。

対流圏下層の適当な高度での運動方程式は、

$$\begin{aligned}u_t - fv &= -p'_x/\rho_0 \\v_t + fu &= -p'_y/\rho_0\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 t は時間でその下付き添え字はオイラー微分を表している。 p' は対流圏下層の適当なレベルでの圧力擾乱である。 u, v は同じレベルでの東向き、北向き風速、 f はコリオリ・パラメータ、 ρ_0 は下層対流圏の代表的な密度である。圧力擾乱は密度擾乱と静水圧の関係にあるが、大気では伝統的に密度よりも温位を変数として使うので、圧力擾乱と温位擾乱の関係を示そう。

$$p' = -H_0\rho_0g\theta'/\theta_0 \quad (8.100)$$

ここで g は重力加速度、 H_0 は下層の代表的な厚さ (500 hPa までを下層とするなら、5~6 km である)、そして θ_0 は代表的な温位である。この式を使って運動方程式を書きなおすと

$$u_t - fv = gH_0/\theta_0 - \theta'_x \quad (8.101)$$

$$v_t + fu = gH_0/\theta_0 - \theta'_y \quad (8.102)$$

が得られる。

浅水方程式に帰着させるには、温位擾乱と u, v との関係を得る必要がある。温位の式は、

$$\theta'_t + \frac{d\bar{\theta}}{dz}w = Q'$$

である。ここで Q' は対流圏中層での加熱率、 w はやはり対流圏中層での上昇風速である。これを $N^2 = (g/\theta)d\bar{\theta}/dz$ の関係を使って書きなおすと

$$\theta'_t + \frac{\theta_0 N^2}{g}w = Q' \quad (8.103)$$

となる。これに連続の式を、下層対流圏で積分した

$$H_0(u_x + v_y) + w = 0$$

を代入すると、

$$\theta'_t + \frac{\theta_0 N^2 H_0}{g}(u_x + v_y) = Q' \quad (8.104)$$

が得られる。このように、(8.101)(8.104) という浅水方程式系が得られた。

大気加熱率 Q がどのように定式化されるかについても、Gill (1982) は示している。大気加熱率は、凝結にともなって生じ、水蒸気が凝結すると気候のスケールでは降水となると仮定できる。したがって、

$$Q' = \rho_w L_v P' / \rho_0 H_1 c_p \quad (8.105)$$

という関係が得られる。ここで、 P' は単位時間当たりの降水量 (降水率, precipitation rate という)、 L_v は単位質量の水の蒸発熱、 ρ_w は水の密度、 c_p は大気定圧比熱、 H_1 は加熱が分布する厚さで H_0 と同じとみなすことができる。この場合は、簡単のために、添え字を落として $H_1 = H_0 = H$ と書くことにしよう。途中です。Gill (1982) p. 126 を読みましょう。

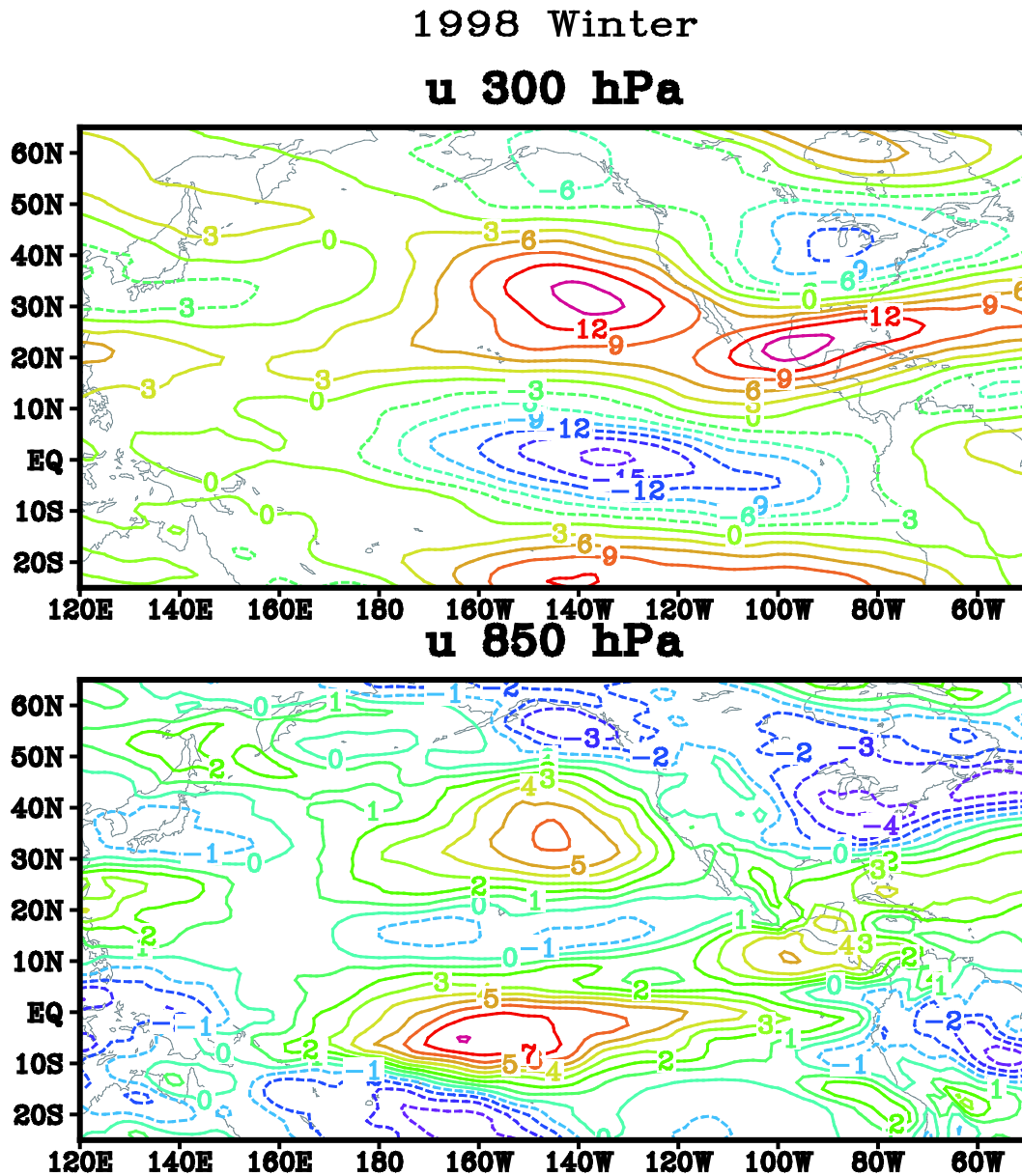


図 8.4: JRA25 再解析データにおける 1998 年冬期 (1997 年 12 月 ~ 1998 年 2 月) 平均の, (上)300 hPa と (下)850 hPa での東西風速偏差. 140W, 30N 付近ではどちらも西風偏差であり, 上下で同じ方向に動く等価順圧的な応答が見られるのに対して, 赤道では 300 hPa では東風偏差, 850 hPa では西風偏差というように上下で逆方向に運動する傾圧第一モード的な応答が卓越している.

第9章 傾圧不安定

傾圧不安定は、大気では中緯度の低気圧および高気圧を形成する源となる重要な不安定である。また、海洋では衛星高度計の観測によって、海洋は数 10km の渦で満ちていることが明らかになったが、この渦を作り出す原因もまた傾圧不安定であると考えられている。この章では、傾圧不安定の基礎を学ぼう。

なお傾圧不安定の力学的な解は、20 世紀半ばに得られた。主な問題の設定には、以下の 3 つがある。

- : Eady 問題 (1949) : f -平面, 連続一様成層, 一般流れの鉛直シアーはいたるところ一定, 水路。
- : Charney 問題 (1947) : β -平面, 連続一様成層, 一般流れの鉛直シアーはいたるところ一定, 水路
- : Phillips 問題 (1954) : β 平面, 2 層。

9.1 複素数の周波数*

不安定とは、擾乱が与えられるとそれがどんどん成長する現象である。方程式を使って議論する場合には、ある基本場を与えて、それからのずれである擾乱場が成長するかどうか、成長するとすればどういう条件でまたどのように成長するかを明らかにすることが、不安定論の概要となる。通常この際、基本場の周りで線型化を行うので、成長（または減衰）は指数的となる。なぜなら、線形化された方程式の解は、 \exp （およびその変形である \sin, \cos ）で表されるからである。

また多くの場合、不安定は波動解の表現の中で扱われる。波動解は一般に、 $\exp(i(kx + ly + mz - \omega t)) = \exp(i(kx + ly + mz)) \exp(-i\omega t)$ と表すことができる。ここで、 ω にマイナスを付ける流儀を採用しているのは、この場合周波数と波数が共に正の場合に、正の方向に位相伝播する波を表すので、より直感的に把握しやすいからである。

不安定すなわち時間がたつにつれて成長する解を表現するには、 ω を複素数にすればよい。すなわち、

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (9.1)$$

である。この場合、

$$\exp(-i\omega) = \exp(-i\omega_r t) \exp(\omega_i t) \quad (9.2)$$

となる。結局、(角) 周波数の虚部が、成長率に他ならない。ここで成長率は、 e 倍に成長するのによする時間の逆数である。

また、成長解となる場合を不安定、減衰解となる場合を安定、成長も安定もしない場合を中立と言う。

9.2 傾圧不安定のメカニズムの概念的理解*

鉛直方向にシアを持つ地衡流は温度風の関係から、密度面の傾きを伴っている図9.2. この状態は、最少のエネルギー状態ではない。密度面の傾きは小さい方が、ポテンシャルエネルギーはより小さく、流速は傾きに比例するので運動エネルギーも小さい。もちろん静止状態が最少エネルギーの状態である。従って、エネルギーの解放を伴う密度面の傾きが小さくなる変化が生じ得ることが示唆される。

しかし、平均的な流れの構造を保ったまま密度面の傾きが小さくなるならば、水柱の引き延ばし(stretching)と収縮(squeezing)による渦位の変化が生じなくてはならない。摩擦によって渦位が変化する場合には、このような平均的な流れの構造を保ったまま温度風が減衰することが可能であるが、より重要な過程は傾圧不安定として知られているものである。

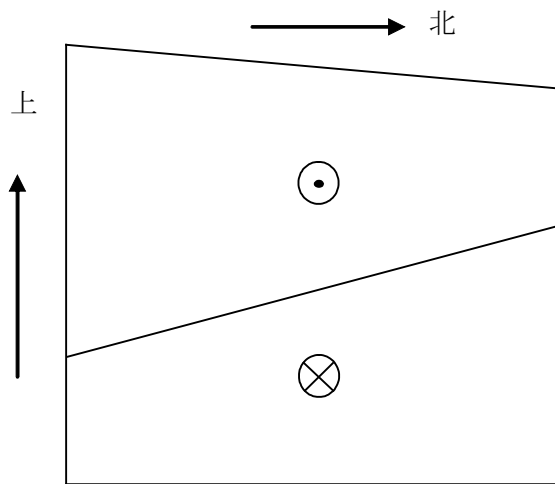


図 9.1: 傾圧不安定を考える際の状況。なお、上層の境界面は自由表面と仮定して勾配を(誇張して)与えているが、鍋蓋近時でも本質は変わらない。

鉛直方向の水柱の引き延ばし・収縮を渦位を保存したまま行い得るためには、相対渦度が生じなくてはならない。引き延ばしは北半球では低気圧性(cyclonic)の、収縮は高気圧性(anti-cyclonic)の渦を生じさせる。位置エネルギーが渦運動のエネルギーに転化し、さらに鉛直もしくは水平の摩擦を通じてエネルギーが効率良く減衰する。

2層 f 面で考えてみよう。上層は北に向かって浅くなっており、流れは上層で東向き、下層で西向きとする。上下層でそれぞれ水柱の南北移動があるとしよう(図9.2a)。まず上層の流れを考える。擾乱によって上層の水柱が北に運ばれるとすると、上層では北の方が薄いので、渦管の収縮が生ずるために高気圧性の循環が生ずる。一方逆に南に移動した水柱では、低気圧性の循環が生じる。また下層では上層とは逆に北の方が厚くなっているため、北に移動した水柱は低気圧性の、南に移動した水柱は高気圧性の回転を生じる。ただし、この水柱の移動に伴う収縮と伸張は、移動した水柱の厚さを周囲の流体の厚さと等しくするほど完全ではないとする(図9.2b)。すると、水柱の移動に伴い、上下層の境界は若干上下にゆがむ。すなわち、たとえば上層の水柱が収縮した場所では、まだ回りの水柱よりは長いので境界層を押し下げて、下層の水をも収縮させる。すると下層の水も上層の水と同じ高気圧性の循環を生じる。同様に下層の水が南に移動して収縮した場所では、上層でも境界層の上昇を通じて水柱が収縮し、高気圧性の循環を生じる。上層または下層の水が移動の直接の結果伸張して低気圧性の循環となった場所では、やはりもう一方の層に低気圧性循環を生じさせる。逆に上層水が南に移動して低気圧性の循環が生じる場所では、下層でも低気圧性の循環が生じるこの境界の降下は下層の水柱を収縮させるので、下層においても高気圧性の循環が生ずる。逆に上層の水柱が厚い方に移動するならば、上層で渦管の伸展による低気圧性の循環が生じ、また上下層

の境界が若干上昇するために、下層でも渦管の伸展による低気圧性の循環が生ずる。

一方下層の流れによっても上層に同様に流れが生じ得る。下層の水柱を下層の厚さが薄い方に移動させれば渦管の収縮が生じよって高気圧性の循環が生ずる。この際上下層の境界は若干押し上げられる。この境界の上昇は上層の水柱を収縮させるので、上層においても高気圧性の循環が生ずる。逆に下層の水柱が厚い方に移動するならば、下層で渦管の伸展による低気圧性の循環が生じ、また上下層の境界が若干降下するために、上層でも渦管の伸展による低気圧性の循環が生ずる。

このような上層の水塊移動による下層の流れと、下層の水塊移動による上層の流れが、相互作用することによって傾圧不安定が生じ得る。傾圧不安定が生ずるには、流れの向きに位相がずれていることが必要である。

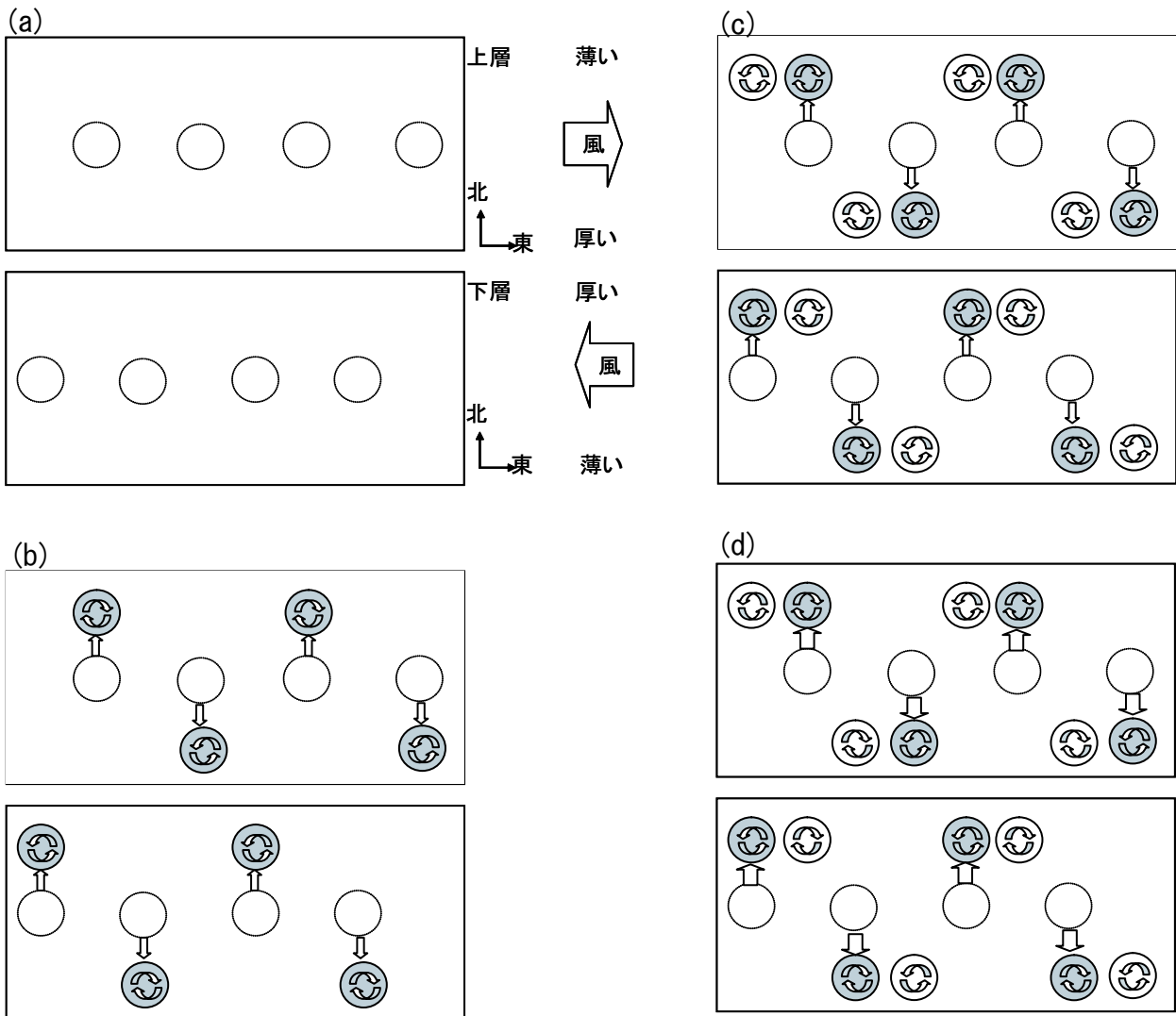


図 9.2: 傾圧不安定のメカニズムの概略。陰影がついた流体柱の回転は最初の南北変位によって生じた回転であり、陰影がついていない流体柱の回転は境界層の上下動によって生じた回転であることを意味する。

1層だけに擾乱が限定されている場合は、渦管の南北移動による循環によって移流による二次的な循環は、峰と谷の中間に生じ、擾乱は成長するのではなく水平方向に伝播してロスビー波を形成した。

渦管の伸展・収縮が相対渦度を生ずることによって可能かどうかは、現象のスケールにも依存する。準地衡流における渦位の表現は

$$q = \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

であった．第1項は相対渦度で，

$$\nabla^2 \psi \approx \frac{\psi}{L^2}$$

第2項は渦管の伸縮による渦位を示し

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \approx \frac{f^2 \psi}{N^2 H^2} = \frac{\psi}{\pi^2 L_d^2}.$$

現象の水平スケール L がロスビーの変形半径 R (連続成層の場合は $(NH)/f$) よりも十分に大きいのであれば，相対渦度は伸縮に応ずるだけの大きさを持ち得ないので，渦位保存から伸縮は生じ得ない．一方 L が R よりも十分に小さいのであれば，渦位の中で相対渦度が支配的となって，境界面の変位が無視できる位どに小さく，上下層の変動は生じない．したがって， L が L_d と同じオーダーである場合に不安定が生ずることが予想される．なお，海洋での L_d は中緯度で $2 \sim 3$ 度，大気では $2 \sim 30$ 度が代表的な値である．

9.3 Eady 問題**

Eady 問題とは， f 平面上の一様な成層と一様な一般流の下での傾圧不安定を議論するものである．

次の仮定を置く：非粘性・一様成層 $N^2 = \text{const} \cdot f$ 面 ($\beta=0$)・底は平坦 ($z=0$)・rigid lid ($z=H$)．今 z の原点は，流体の底に取っている．これは Eady 問題は一般に大気により適している問題であるので，流体の底を原点とすることが自然であるとともに，そうすることで式も若干簡単になるからである．一般流は水平一様でその鉛直シアも一定であるとするすなわち， $\bar{u} = Uz/H$, $U = \text{const}$, $\bar{v} = 0$ ，このとき温度風の関係から密度の南北微分は一様である．ここでは一般流を底でゼロとしているが，これに鉛直・水平一様な成分を加えても，不安定の性質は一様なドップラーシフトが生ずること以外は変化しない．出発方程式は 5.5 で導出した連続成層流体中の準地衡流方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \psi_z \right) + \beta y \right\} = 0$$

である．また境界条件は，

$$w = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, H \quad (9.3)$$

である．

流れを一般流れと擾乱場に分けて考える．すなわち， $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ として $\bar{\psi}$ は時間的に不変であるとする． $\bar{\psi} = -Uyz/H$ で与えられる．すると上式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{H} z \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \Delta \psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi' \right\} = 0$$

となる．この式から基本場の変化の無い x 方向と同様に y 方向にも三角関数で解を仮定することができる．そこで， $\psi'(x, y, z, t) = \tilde{\psi}(z) \exp[i(kx + ly - \omega t)]$ との形の解を仮定すると¹，上式は

$$\left\{ -i\omega + i \frac{U}{H} zk \right\} \left\{ -(k^2 + l^2) \tilde{\psi} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\psi} \right\} = 0$$

となる．最初のカッコ内がすべての深さでゼロとなることはあり得ないので，二つめのカッコ内がゼロとならなくてはならない．すなわち，全波数 $K^2 \equiv k^2 + l^2$ を用いて

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\psi} = \frac{N^2 K^2}{f_0^2} \tilde{\psi}$$

であるから，

$$\tilde{\psi} = A \cosh \left(\frac{NK}{f_0} z \right) + B \sinh \left(\frac{NK}{f_0} z \right)$$

¹ $y = 0$, L の水路とみなす場合は， y 方向は $\sin(ly)$ を仮定する．最終的な結果は全く同一である．

が解となる．ここで， A, B は定数である．なお， \cosh, \sinh の代わりに \exp を用いても本質的に変わらないが， \cosh, \sinh を用いる方がより単純に境界条件を表現できる．またここで， z に関する表現をロスビー変形半径 ($L_d = NH/f_0$) を使って無次元化することで，見通しをよくしよう．すなわち，

$$\frac{NK}{f_0} z = \frac{NH}{f_0} K \frac{z}{H} = (L_d K) \frac{z}{H} = \mu \frac{z}{H}, \quad \mu \equiv L_d K$$

と表現しよう． μ はロスビー変形半径で無次元化された波数， z/H は H で無次元化された高度である．従って，解は

$$\therefore \tilde{\psi} = A \cosh\left(\mu \frac{z}{H}\right) + B \sinh\left(\mu \frac{z}{H}\right) \quad (9.4)$$

である．

境界条件 (9.3) は w について与えられており，準地衡流の w は (5.61) すなわち，

$$w = \frac{f_0}{N^2} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} + J(\psi, \psi_z) \right)$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi'_z + J(\bar{\psi}, \psi'_z) + J(\psi', \bar{\psi}_z) = \frac{\partial}{\partial t} \psi'_z - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \psi'_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{at } z = 0, -H$$

ここで先ほどの波動解を仮定すると，両辺を k で割って

$$\left(c - U \frac{z}{H} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + \tilde{\psi} \frac{U}{H} = 0 \quad \text{at } z = 0, -H \quad (9.5)$$

である．よって $z = 0$ では，この境界条件が

$$c \tilde{\psi}_z + \tilde{\psi} U/H = 0$$

となり，これに (9.4) を代入して，

$$\begin{aligned} \frac{c\mu}{H} \{A \sinh(0) + B \cosh(0)\} + \frac{U}{H} \{A \cosh(0) + B \sinh(0)\} &= 0 \\ \therefore A &= -\frac{c\mu}{U} B \end{aligned} \quad (9.6)$$

また $z = -H$ での境界条件は，

$$\frac{\mu}{H} (c - U) \{A \sinh \mu + B \cosh \mu\} + \frac{U}{H} \{A \cosh \mu + B \sinh \mu\} = 0$$

となる．これに (9.6) を代入して，両辺に $-UH/(\mu \sinh(\mu))$ をかけて整理すると以下の2次式を得る．

$$c^2 - Uc - \frac{U^2}{\mu^2} + \frac{U^2}{\mu} \coth \mu = 0$$

解の公式から

$$\begin{aligned} c &= \frac{U}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{U^2 - 4 \left(-\frac{U^2}{\mu^2} + \frac{U^2}{\mu} \coth \mu \right)} \\ &= \frac{U}{2} \pm \frac{U}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1 - \mu \coth \mu} \\ &= \frac{U}{2} \pm \frac{U}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{4} + 1 - \frac{\mu}{2} \left(\tanh \frac{\mu}{2} + \coth \frac{\mu}{2} \right)} \end{aligned}$$

となる．ここで2行目から3行目への変換には下の関係を用いた．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{x}{2} + \coth \frac{x}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} + \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^x - e^{-x} - 2) + (e^x + e^{-x} + 2)}{e^x - e^{-x}} = \coth x \end{aligned}$$

さらにルートの中を因数分解して，

$$c = \frac{U}{2} \pm \frac{U}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right)} \quad (9.7)$$

となる．

不安定(成長)解となるには， ω が，従って $c = k\omega$ が複素数であり，この時ルートの中は負でなくてはならない． $\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} > 0$ は常に成り立つので， $\coth \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} > 0$ が，不安定となる条件である．これは $\mu < 2.4$ の領域で成り立つ．このことは，

$$\mu = L_d K = L_d \frac{2\pi}{L} < 2.4 \quad \rightarrow L > 2.6 L_d$$

と，波長がロスビーの変形半径の2.6倍よりも長いなら，不安定となることを意味する．

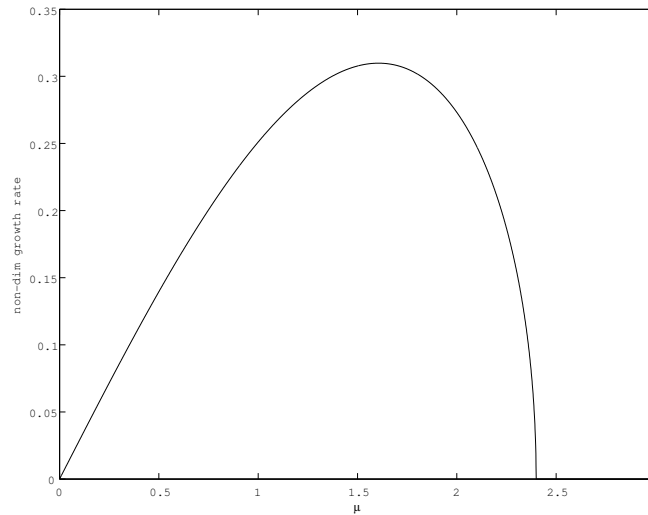


図 9.3: 無次元の成長率．不安定であるのは $\mu < 2.4$ の領域である．また，最大成長率は 3.1 で，そこでは $\mu=1.6$ である．

成長率 ($\omega_i = \Im(kc)$) は

$$\omega_i = \pm k \frac{U}{\mu} \sqrt{\left(\coth \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right)} \quad (9.8)$$

である． $\mu = L_d \sqrt{k^2 + l^2}$ であるので，(9.8) が最大値を持つのは $l = 0$ である．これは，ルートの前の部分が

$$k \frac{U}{\mu} = k \frac{U}{L_d \sqrt{k^2 + l^2}}$$

なので，ある μ についてこれを最大にするには $l = 0$ であるためである．この場合，

$$\omega_i = \pm \frac{U}{L_d} \sqrt{\left(\coth \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right)} \quad \text{for } l = 0$$

となる．これは L_d/U という時間スケールで，ルートで示される無次元の成長率を次元化しているとみなすことができる．従って，イーディーの成長率(Eady growth rate)を，

$$\sigma_E \equiv \frac{U}{L_d}$$

と定義する。ただし、これはあくまで目安であり、無次元の成長率 (図 9.3) の最大値である 0.31 をイーディー成長率にかけたものが、実際の最大成長率である。

なお、不安定解を持つ場合は、(9.7) より、明らかに伝播速度は $U/2$ であり、平均流速となっている。

大気と海洋それぞれで、どの程度の波長が不安定となるのか、また成長率がどの程度かを調べてみよう。大気では、 $H \sim 10$ km, $U \sim 10$ m s⁻¹, $N \sim 10^{-2}$ s⁻¹ 程度であるので、コリオリ・パラメータを 10^{-4} として、変形半径は $Ld = NH/f \sim 10^{-2} \cdot 10^4/10^{-4} \sim 1000$ km で、最大成長スケールは $L_{max} \sim 3.9Ld \sim 4000$ km, 成長率は $\omega_i = 0.3U/Ld \sim 0.3 \times U/Ld \sim 0.3 \times 10/10^6 \text{ s}^{-1} \sim 0.26 \text{ day}^{-1}$ (約 4 日で e 倍に成長) となる。一方海洋では、 $H \sim 1$ km, $U \sim 0.1$ m s⁻¹, $N \sim 10^{-2}$ s⁻¹ 程度で、変形半径は $Ld = NH/f \sim 10^{-2} \cdot 10^3/10^{-4} \sim 100$ km で、最大成長スケールは $L_{max} \sim 3.9Ld \sim 400$ km, 成長率は $\omega_i = 0.3U/Ld \sim 0.3 \times U/Ld \sim 0.3 \times 0.1/10^5 \text{ s}^{-1} \sim 0.026 \text{ day}^{-1}$ (約 40 日で e 倍に成長) となる。

9.4 不安定の必要条件**

イーディー問題を相当な程度まで解析的に解くことが可能であったのは、それは一般場が一様成層・一様な鉛直シアという単純化された条件が課されたためである。ここではより一般的な条件の下での不安定となる必要条件を求めよう。²

線形化された準地衡流方程式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, q') + J(\psi', \bar{q}) = 0$$

$$q' = \Delta \psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2}$$

において一般流は任意関数 $\bar{u}(y, z)$ であるとする。これに対応する流線関数を $\bar{\psi}(y, z)$ とすれば、一般場の洞位は β 効果を含めて

$$\bar{q} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} + \beta_0 y$$

となる。この式を上準地衡流方程式に代入して、また

$$\psi'(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\tilde{\psi}'(y, z) \exp ik(x - ct) \right]$$

という形の解を仮定すれば、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\bar{u} - c} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} - k^2 \right) \tilde{\psi}' = 0 \quad (9.9)$$

が得られる。

鉛直方向の境界条件は、rigid lid を仮定して $w = 0$ とすると、

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi'_z + J(\bar{\psi}, \psi'_z) + J(\psi', \bar{\psi}_z) \right\} = 0$$

から

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial \tilde{\psi}'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tilde{\psi}' = 0 \quad \text{at } z = 0, H$$

を得る。南北方向には幅 L の水路に理想化されるとして、水路境界では南北流速 $v' = \partial \psi' / \partial x$ がゼロであるとすると

$$\tilde{\psi}' = 0 \quad \text{at } y = 0, L$$

でなくてはならない。

²この節は導出に若干飛びが大きいので、読者はよく注意して追って欲しい。将来はもう少し、導出を丁寧になりたい。

(1) 式に $\tilde{\psi}'$ の共役複素数をかけて南北と鉛直の全領域で積分し，部分積分を行って上の境界条件を用いると，次の式を得る

$$\int_0^H \int_0^L \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{\psi}'}{\partial y} \right|^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}'}{\partial z} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}'|^2 \right\} dy dz$$

$$= \int_0^H \int_0^L \frac{1}{\bar{u} - c} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} |\tilde{\psi}'|^2 dy dz + \int_0^L \left[\frac{f_0^2}{N^2} \frac{1}{\bar{u} - c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} |\tilde{\psi}'|^2 \right]_{-H}^0 dy$$

この式の虚部は

$$c_i \left\{ \int_0^H \int_0^L \frac{|\tilde{\psi}'|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dy dz + \int_0^L \left[\frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\tilde{\psi}'|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right]_0^H dy \right\} = 0$$

である．不安定であるためには， c_i はゼロ以外の値を持たなくてはならないので $\{ \}$ 内はゼロとならなくてはならない． $\partial \bar{q} / \partial y$ がゼロ以外である場合に $\{ \}$ 内がゼロであるためには，次のいずれかが成り立たなくてはならない

- $\partial \bar{q} / \partial y$ が領域のどこかで符号を変える
- $\partial \bar{q} / \partial y$ の符号が一定なら，その符号と $z = H$ での $\partial \bar{u} / \partial z$ の符号が逆となる．
- $\partial \bar{q} / \partial y$ の符号が一定なら，その符号と $z = 0$ での $\partial \bar{u} / \partial z$ の符号が同じになる．

傾圧不安定の場合は，このうち最初の条件で不安定が生じた．また，Eady 問題では最後の条件が成立している．実際の中緯度では， $\partial \bar{q} / \partial y$ は惑星渦度による寄与が支配的なので正となり，西風が卓越するので $\partial \bar{u} / \partial z$ もまた正となって，不安定が生じ得る．この表面での西風シアは，温度風の関係から表面での南北温度勾配（赤道側で高温で極側で低温）を伴うことになる．この下層の南北温度勾配は，下層の傾圧性と呼ばれ不安定を発生させる上で重要な役割を果たす．

9.5 Matlab スクリプト

図 9.3 のスクリプト．

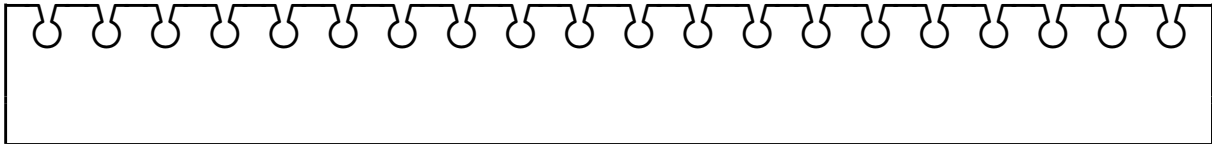
```
mu=0:0.001:3;
x=sqrt((coth(mu./2)-(mu./2)).*(mu./2-tanh(mu./2)));
plot(mu,x)
xlabel('\mu')
ylabel('non-dim growth rate')

mu(max(find(real(x)>0))) %不安定になる最大の \mu = 2.4
max(real(x))           %最大成長率 0.31
```

第II部

大気海洋相互作用

第10章 エル・ニーニョの主要理論



10.1 熱帯のフィードバック

ビヤークネス・フィードバック

Wyrtki のたまったら流れる理論.

10.2 理論のクラス：サイクルかイベントか

個々のメカニズムを説明する前に、メカニズムのクラスについて概観したい。エル・ニーニョを説明するメカニズムには、大きく分けると自励振動と、ノイズが減衰振動に働くという、二つがある。後で説明する遅延振動子理論や充填放出振動子理論は、自励振動として提出されている。このような自励振動は、微小振幅（すなわち線形化すると）については、何らかの不安定で振動が成長する。すなわち振動メカニズムが持つ成長率は、微小振幅で正である。なお、成長しすぎないようにするには、大振幅で効く非線形の減衰項が必要となる。一方、ノイズが減衰振動に働くという場合には、何らかの振動メカニズムが存在するけれども、成長率は負であってそれ自身では振動を生じさせることはできない。しかし周期的な外力が加われればもちろん、振動することができる。例えば白色ノイズであれば、すべての周波数に同じ大きさのエネルギーを持っている。そこで、系が持っている振動しやすい周波数（すなわち成長率の極大）が、効果的にノイズに応答して、特徴的な周期で振動することになる。遅延振動子理論や充填放出振動子理論で提案されているメカニズムも、自励振動として振動を生じさせるのではなく、ノイズの外力によって振動を生じさせるという形で、実際のエル・ニーニョに寄与している可能性がある。自励振動かそうではないかという問いはまた、エル・ニーニョは繰り返し生ずるのか（サイクルか）、それとも単発か（イベントか）という問いにも密接に係わっている。ここで言う繰り返し生ずるのかという問いは、単にスペクトル・ピークがあるかどうかではなく（それはあることが分かっている）、あるエル・ニーニョが次のラ・ニーニャを引き起こすのか、ひいてはその次のエル・ニーニョを引き起こすのか？という問題である。もし自励振動であれば、振り子が正に振れることが、次の負に振れることを引き起こすように、エル・ニーニョは本質的にサイクルであるということになる。しかしもしノイズの寄与が重要で、予測不可能なノイズがつついてくれなくてはエル・ニーニョまたはラ・ニーニョが生じないのであれば、イベントとしての色彩が強くなる。自励振動であってもそうではなくても（つまり成長率が正でも負でも）、系に内在する周期がエル・ニーニョの振る舞いに重要であるということは、上の議論から了解されるだろう。そのような内在周期を持つエル・ニーニョ理論は、いくつも提案されている。主要なものには、Suarez and Schopf (1988) と Battisti and Hirst (1989) による遅延振動子理論、Jin (1977) による充填放出振動子理論があり、その他に Wang の西太平洋振動子理論、統一振動子理論などがある。以下では遅延振動子理論と充填放出振動子理論について説明しよう。

10.3 直感的な遅延振動子方程式の提案

最初に遅延振動子理論を提案したのは Suarez and Schopf (1988) で、彼らは相当程度直感的に遅延振動子を提案している。彼らは、まず同時フィードバックを、無次元化の形式で

$$\frac{dT}{dt} = T - T^3 \quad (10.1)$$

であるとした。ここで右辺第一項はピヤークネス・フィードバックの正のフィードバックをあらわしている。一方右辺第二項は、大振幅で効く非線形の負のフィードバックを表している。二乗 (T^2) では T の符号に係わらず常に正になってしまうけれど、三乗 (T^3) だと T と同じ符号になるので、 $-T^3$ で最も簡単に非線形の負のフィードバックを表すことができる。もし二乗を使いたければ $-T|T|$ としてもいいけれど、本質的には変わらないし、かえって解析しづらくなる。

彼らは半年ほど前に出版した論文 (Schopf and Saurez 1988) で、彼らの数値モデルでエル・ニーニョが周期的に生じており、それは (図 10.1) に示したような、一連の過程によることを提案している。このように、半周期前に発生した海洋波動が遅れて熱帯赤道太平洋に影響を与える効果を加えて、以下の遅延方程式を提案した。

$$\frac{dT}{dt} = T - T^3 - \alpha T(t - \tau) \quad (10.2)$$

ここで、第三項が遅延項で、 τ が遅延時間である。この方程式では、第三項が振動を引き起こす原因になっている。すなわち、もし初期から $T > 0$ であれば、 τ 時間後には、その遅延フィードバックが $-\alpha T < 0$ として効くので、 T を負に変化させようとする。一方 $T(t - \tau)$ が負であれば、遅延フィードバックは T を正にしようとする。このように、遅延項に負号がついているためにもととの極性を反転させる働きがあり、この項をしばしば遅延反転フィードバックと呼ぶ。これが、Suarez and Schopf の遅延振動方程式であり、筆者が知るかぎり遅延振動方程式が気候変動研究に導入された初めての例である。

なおこの方程式は、次元量の形では

$$\frac{dT}{dt} = aT - bT^3 - cT(t - \tau)$$

と書かれる。ここで時間のスケールを a^{-1} で、同時フィードバック (10.1) の定常解で振幅のスケールを $(a/b)^{1/2}$ で決めると、上記の無次元化された方程式が (10.2) が得られる。

10.4 遅延振動方程式の導出

Saurez and Schopf (1988) では直感的に遅延振動方程式を導出しており、その直感はモデルの振る舞いという裏づけはあったものの、例えば各パラメータがいくつにならなくてはならないかを明確にすることは回避していた。Battisti and Hirst (1989) では、やはり数値モデルの結果を下敷きにはしているけれども、より厳密に遅延振動方程式とつなげており、その結果パラメータの値も定めることができた。ただし、数値モデルの結果に基づいているということは、得られたパラメータが正しいとは限らないことには注意が必要である。

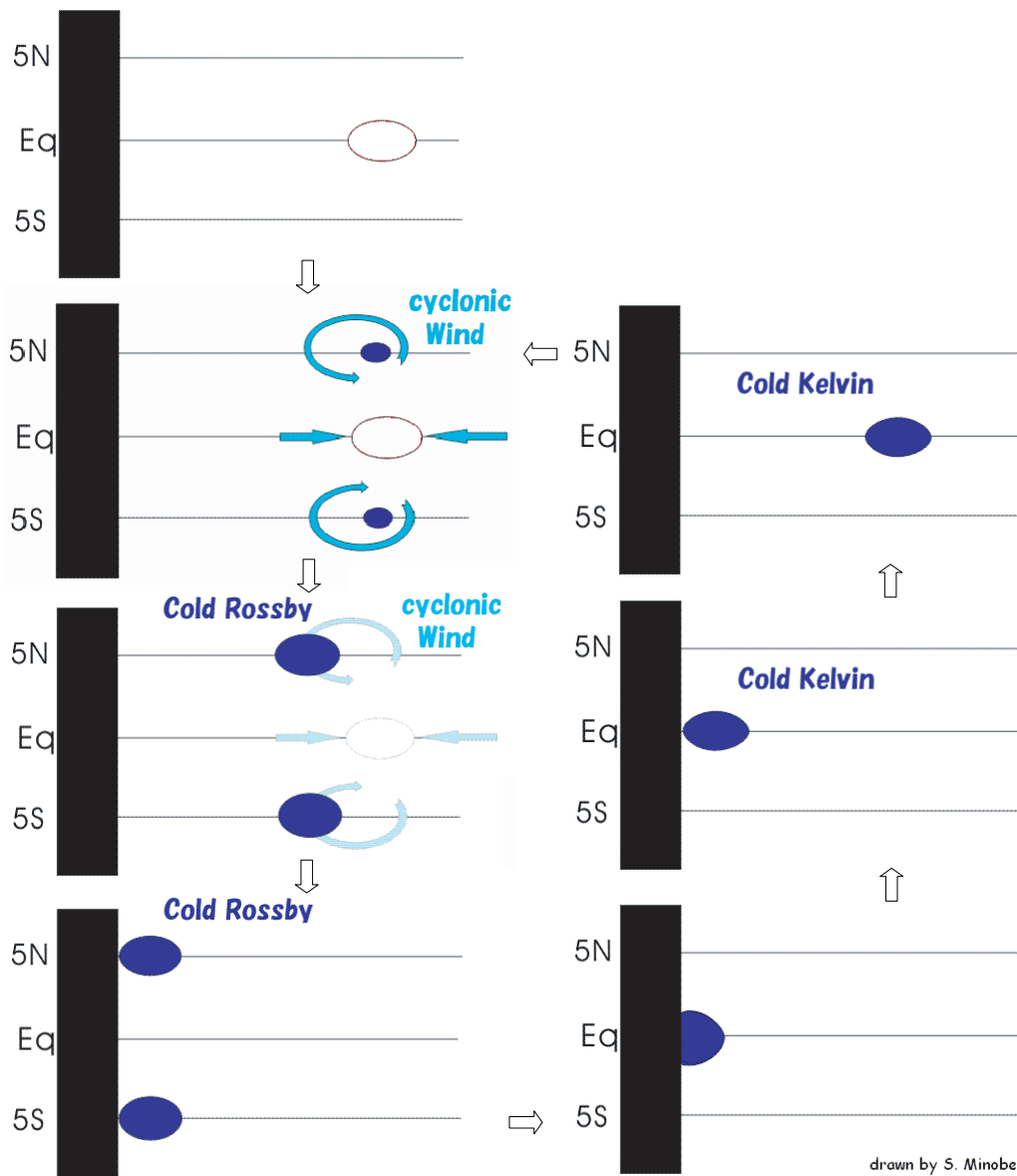
Battisti and Hirst (1989) が基礎としているのは、混合層の水温の方程式である。彼らが出発方程式としたのは以下の方程式である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} - u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \delta H(\bar{w}) \bar{w} \frac{\partial T}{\partial z} - \delta H(\bar{w}) w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \alpha_s T \quad (10.3)$$

ここで H はヘビサイドの階段関数である¹。であり、また T は SST の偏差、 u, v は東西・南北流速、 w は湧昇速度、 α_s は熱的な減衰係数、 δ は混合効率係数で 0.75 である。またオーバーバーは時間平均を意味して

1

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$



drawn by S. Minobe

図 10.1: エルニーニョを引き起こす遅延振動の模式図．図中の白い楕円は暖かい表層が厚い偏差を，黒の楕円は薄い偏差を示す．まず，赤道東太平洋に暖かい水温偏差があるとす．この水温偏差は，赤道の外に低気圧性の風の偏差を引き起こす．この低気圧性の風の偏差は，北（南）半球で風の右（左）へのエクマン輸送を生じさせるので，低気圧の直下でエクマン輸送の発散が生じる．この発散は表面の暖かい偏差を薄くし，その表面の偏差はロスビー波として西へ伝播する．このロスビー波は，表層が薄いために低温偏差を持つので，cold Rossby と呼ばれる．ロスビー波が西岸で反射し，赤道ケルビン波として東に伝播する．この赤道ケルビン波が東太平洋に達すると，初期状態の逆負号の状態となる．すなわちここまでで半サイクルであり，この後は図の符号を変えてサイクルを繰り返す．

いる．ヘビサイドの会談関数が使われているのは，鉛直移流が SST に影響するのは湧昇が生じている場合のみであって，逆の沈降が生じている場合には影響せず，しかも気候値の鉛直移流が偏差の鉛直移流よりも大きいために鉛直移流の符号は気候値の鉛直移流で決まるということを表している．このような表現は，いわゆる Zebiak & Cane モデル (Zebiak and Cane 1987) で初めて導入されたものである．

温度偏差の鉛直勾配を，

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T - T_S}{H_1} = \frac{T - a(\bar{h})h}{H_1}$$

と線形化して表現しよう．ここで T_S は亜表層の温度偏差で，密度躍層の上下によってもたらされるとする． H_1 は海洋混合層の厚さである．なおここでは $T_S = a(\bar{h})h$ と線形化して表しているけれども，本来は T_S と h とは非線形の関係にある．上式を (10.3) に代入して，南北速度偏差による移流 $(\partial \bar{T} / \partial y)v$ を小さいとして無視しよう．

さらに彼らは (10.3) を東赤道太平洋 (180° –東岸, 2°S – 2°N) で水平平均し，その平均量の関係を定めた．すなわち上式で未知変数であるのは， T, u, h, w である．このうち， u, w は東赤道太平洋の風応力偏差に比例するとし，その風応力偏差は東赤道太平洋の SST 偏差 T に比例するとした． T について解くとすれば，後は h と風応力との関係を定めればよい．彼らは h は，局所的に定まる h_L と，西太平洋からの反射によるケルビン ($h_{\text{reflected Kelvin}}$) からなるとした．さらに東太平洋の風応力と， h_L は同時の比例関係を持ち， $h_{\text{reflected Kelvin}}$ は遅れた比例関係を持つとした．すなわち，

$$\begin{aligned} h &= h_{\text{reflected Kelvin}} + h_L, \\ h_{\text{reflected Kelvin}} &= -a_W \tau^x (t - \tau), \quad h_L = a_L \tau^x \end{aligned} \quad (10.4)$$

である．ここで， a_L は十分時間が長い現象では，東西風応力が温度躍層の東西勾配を生じさせるという関係を表している．一方 a_W は赤道の風応力が，やや極側にロスビー波を生じさせ，それが西岸で反射されて赤道ケルビン波になるという遅延関係を表している．こう考えることで，() 式の右辺第 5 項に遅延反転フィードバックが導入された．他の項は全て線形同時フィードバック項である．結局それらの項をまとめて，また係数を書き換えて

$$\frac{dT}{dt} = aT - cT(t - \tau) \quad (10.5)$$

という，線形遅延振動方程式が得られた．

Battisti and Hirst (1989) は，さらに非線形フィードバックも遅延振動方程式に導入している．一般に熱帯の応答で非線形性が生じる理由には二つあり得ると考えられている．一つは大気加熱に関係し，潜熱放出による大気加熱が生じるには，大気下層の収束と中層での上昇気流が生じていなくてはならない．従って，収束と上昇気流が存在すれば，その強さに応じて大気加熱が生じることが期待される一方，下層で発散し中層で下降気流になっているなら，その程度が変化しても大気加熱はゼロに張り付いたままとなるのである．もう一つの非線形性は湧昇流による SST の冷却によって生じる．まず，上で述べたように湧昇が生じていなくては SST を変化させる効果が生じない．さらに，湧昇する亜表層水温 T_S は単純に h に比例するのではないと考えられる．すなわち，水温は深さについて線形に変化しているわけではなく，強い勾配を温度躍層で持ち，その上下では勾配は緩い．この効果を数値計算に取り入れた Zebiak and Cane (1987) にならって，Battisti and Hirst (1989) も T_S を，図 10.2 のように表した．さらに，この亜表層水温偏差の寄与を単純化するために，テーラー展開して本質的な項だけを取り出すと

$$T_S = a(\bar{h})h - b^*h^3 + O(h^5) \quad (10.6)$$

となる．これを用いて遅延振動方程式を書き直すと，

$$\frac{dT}{dt} = aT - b(T - \gamma T(t - \tau))^3 - cT(t - \tau) \quad (10.7)$$

が得られる．Suarez and Schopf (1988) の遅延振動方程式での非線形フィードバックは，同時フィードバックのみに関係していたけれど，Battisti and Hirst (1989) では非線形フィードバックの起源が躍層振動の変

動にあって、その変動には (10.4) のように、遅延効果が入っていることを考慮して、非線形フィードバックにも遅延効果が導入されている。この効果が相対的にどの程度かはパラメータ γ で与えられ、彼らは 0.66 という値を選んでいる。

なお、図 10.2 のフィードバックを (10.6) と近似することには、二つの主要な違いが現れることを注意しよう。まず本来のフィードバックは常に正であるのに、近似されたフィードバックは負のフィードバックを持つ。また本来のフィードバックは、 h の正負で強さが異なるのに、近似されたフィードバックでは同じ強さになっている。これらの点には、単純な遅延振動子モデルの結果を解釈する際に、よく注意する必要がある。

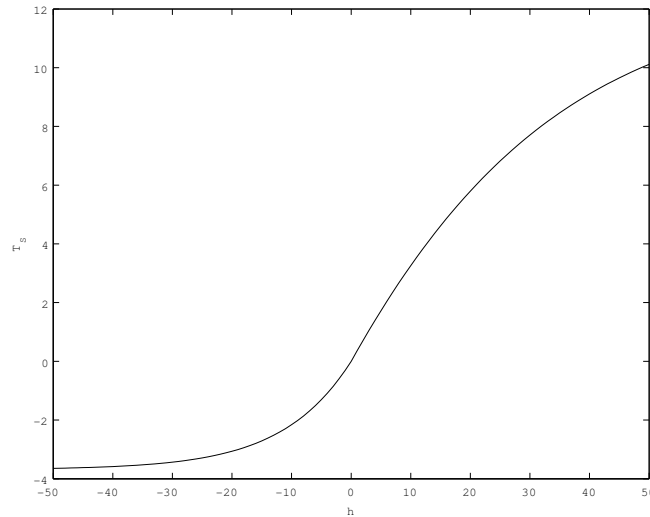


図 10.2: Battisti and Hirst (1989) が用いた、亜表層水温偏差と密度躍層深度偏差との関係。

10.5 充填放出振動子の導出

遅延振動子は、エル・ニーニョが数年のタイムスケールを持つということを説明し、また数値計算でもある程度に通った振る舞いが得られるものの、期待される周期が 2 年程度と観測の 2-6 年に比べてかなり短いという問題があった。そこで、遅延振動子に変わるモデルとして提出されたのが、充填・放出振動子である (Jin 1997)。

充填放出振動子では、赤道の外でのスウェルドラップ流によって赤道に暖かい上層の水が充填または放出されると考える (図??)。このスウェルドラップ流によって、充填・放出された結果生ずる、上層の厚さの偏差 (厚い方が正) は、スウェルドラップ流の収束発散の影響がロスビー波で西へ伝播するために、西での躍層の厚さの偏差として表現される。

$$\frac{dh_w}{dt} = -rh_w - \alpha\tau \quad (10.8)$$

ここで太平洋上の風応力偏差が赤道東太平洋の水温偏差に $\tau = bT_E$ という関係を持つと仮定すると

$$\frac{dh_w}{dt} = -rh_w - \alpha bT_E \quad (10.9)$$

となる。その東太平洋の水温偏差は、

$$\frac{dT_E}{dt} = -cT_E + \delta h_E \quad (10.10)$$

と表せる。右辺第二項は、赤道東太平洋での温度躍層が深ければ赤道湧昇で冷やされる効果が弱まるので、表面水温が上昇することを意味している。

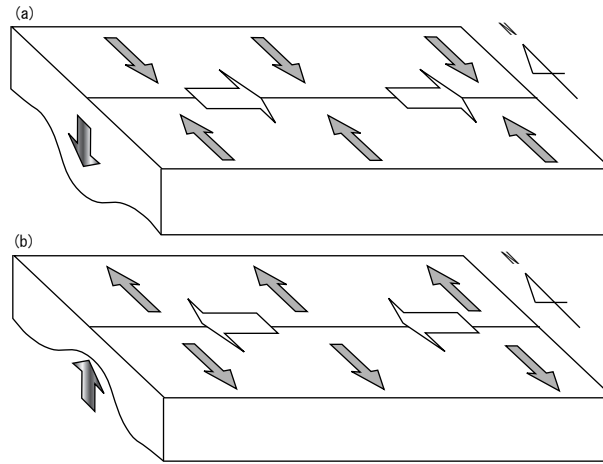


図 10.3: スウェルドラップ流による赤道の充填 (a) と放出 (b) の模式図．白矢印は海上風を，灰色矢印はスウェルドラップ流を，グラデーション矢印は西太平洋での温度躍層の深度（左の曲線）の変化傾向（深くなるか浅くなるか）を示している．(a) では東向きの風が吹いているので，スウェルドラップ流が赤道に収束し，温度躍層が深くなる．一方，(b) では西向きの風が吹いているので，スウェルドラップ流が赤道から発散し，温度躍層が浅くなる．

赤道東太平洋での温度躍層を運動方程式から求めて，上式の h_E を除こう．定常かつ赤道を仮定すると，1.5 層モデル (??節参照) での東西方向の運動方程式は，

$$\mathcal{A} - f v = -g' h_x + \tau$$

であるから，これを太平洋の西から東まで積分すると

$$h_E = h_W + \tau = h_W + b T_E$$

である．遅延振動子理論の場合は，赤道の応答に赤道ケルビン波をあらわに考慮したが，ここでは赤道ケルビン波の伝播時間よりも長い時間スケールを考えているために，定常を仮定している．上式を (10.10) に代入すれば，

$$\frac{dT_E}{dt} = (\delta b - c) T_E + \gamma h_W \quad (10.11)$$

となる．ここで δb がポジティブ・フィードバックを意味している．

結局 2 変数 h_W, T_E に関する 2 式 (10.10) と (10.9) が得られた．これらの式は，典型的な成長・減衰振動方程式である．簡単のために $R = \delta b - c$ とし，振動解 $(h_W, T_E)(t) = (\tilde{h}_W, \tilde{T}_E) \exp(-i\omega t)$ を仮定しよう．ここで ω は一般に複素数で，9.1 節で示したように，実部が振動周波数，虚部が成長率である．

すると (10.10)(10.9) は，

$$(-i\omega + r)\tilde{h}_W = -\alpha b \tilde{T}_E, \quad \gamma \tilde{h}_W = -(i\omega + R)\tilde{T}_E \quad (10.12)$$

よって

$$-(-i\omega + r)(i\omega + R)\tilde{T}_E = -\alpha b \gamma \tilde{T}_E.$$

これを，整理して

$$\omega^2 + i(r - R)\omega + rR - \alpha b \gamma = 0$$

となる．解の公式から

$$\omega = \frac{(R - r)i \pm \sqrt{(r - R)^2 - 4(rR - \alpha b \gamma)}}{2}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{(r + R)^2}{4} + \alpha b \gamma} + \frac{R - r}{2} i \quad (10.13)$$

となる．従って， $R - r > 0$ であれば成長振動， $R - r < 0$ であるなら減衰振動である．もちろん成長振動でしかも，振幅を無限に成長させずに安定な状態を実現するには，上では考慮されていない非線形減衰項を付け加える必要がある．

また上のように \tilde{T}_E について解ければ， \tilde{h}_W についても (10.12) から以下のように容易に得ることができる．

$$\tilde{h}_W = -\frac{i\omega + R}{\gamma} \tilde{T}_E \quad (10.14)$$

充填再充填理論と遅延振動子理論との大きな違いは，遅延振動子理論では海洋の記憶を担ったのは，ロスビー波の伝播自体であったが，充填再充填理論では（ロスビー波が伝播することで実現される）スウェルドラップ流によって赤道域に暖水がたまるかどうかである．

演習問題 遅延振動において，太平洋西岸を 120°E ，赤道東太平洋を 140°W とする．また波動伝播は 1.5 層モデルによるとして，1.5 層モデルの重力波の伝播速度は 3 ms^{-1} とする． a) 赤道ケルビン波が西岸と赤道東太平洋の間を伝播する時間を求めよ．

b) 赤道ロスビー波が西岸と赤道東太平洋の間を伝播する時間を求めよ．

c) 赤道ケルビン波と赤道ロスビー波の伝播時間の和が遅延時間であるとして，その遅延時間の倍が振動周期をおおよそ与える．振動周期はどれほどになるか？またそれはエル・ニーニョの特徴にふさわしいか？

10.6 充填放出振動子を支持する観測

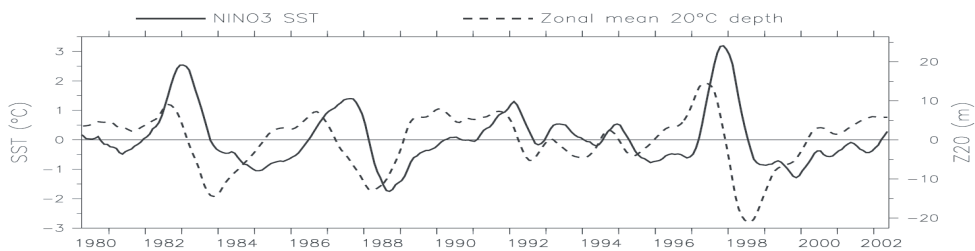


図 10.4: Niño3 SST(実線，左軸) と東西平均した 20°C 等温深度(破線，右軸) 偏差の7ヶ月移動平均で平滑化した時系列．(Kessler 2002)

Shopf, P. S., and M. J. Suarez 1988: Vacillations in a coupled ocean-atmosphere model. *J. Atmos. Sci.*, 45, 549-566. Suarez, M. J. Zebiak, S. E., and M. A. Cane, 1987: A model El Niño/Southern Oscillation. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 2262-2278.

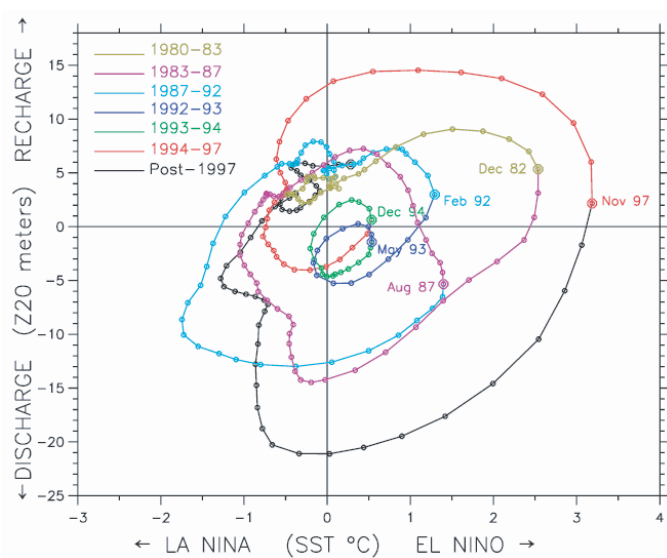


図 10.5: 図 10.4 に示した二つの時系列の位相ダイアグラム．SST と Z20 の軸は、それぞれの分散が図で等距離となるように調整されている．小さい点は各々の月の中心を示している．線の色は各々のエルニーニョの SST の最高値で変更し、そこに丸を付け、その年月をラベルで表している．最後の点は 2002 年 5 月で、黒丸で示されている．(Kessler 2002)

第11章 中緯度の海洋から大気への影響

熱帯海洋の SST 変化が、大気に非常に大きい影響を引き起こすことは広く認められている。一方、中高緯度の海洋が大気にどのような影響を与えるのかは、いまだ明確ではない。まず海洋から大気への影響と言っても、大きく分けて二つの異なる現象があることを意識しよう。一つは、局所的な海洋から大気への影響で、これは最近の高解像度の衛星データ解析、高解像度解析・再解析から、相当程度明らかになりつつある。局所的な応答が同定しやすいのは、大気を持つ空間スケールが海洋の空間スケールよりも大きいためである。このため、海洋の空間構造が大気に反映されている場合や、そこまで空間構造の相似性が高くなくとも海洋の空間スケールで大気海洋が時間的に共通する変動を示す場合には、大気変動が海洋変動によって生じていると結論することができる。一方、より大きな大陸や大洋のスケールの大気が、海洋の影響を受けているかどうかは結論し難い。仮に同時に変化しているとしても、大気が海洋を駆動しているのか、海洋が大気を駆動しているのかは、弁別できない。相関は因果関係を明らかにしないという原則が、立ちはだかるのである。このため、因果関係を明らかにするには、SST を変える数値計算が行われてきた。一般に局所的な大気への影響は、大気境界層およびその直上で強く、対流圏まで影響してもその影響は傾圧的（下層で発散なら上層で収束）である。一方、大規模な大気変動は、上下で同じ方向に風速偏差（偏差は気候値からずれで議論する場合もあるし、東西平均からのずれで議論する場合もある）が生じ、これを等価順圧 (equivalent barotropic) という。なお、海洋では鉛直モード展開を行い、現象を各鉛直モードに分解することもしばしばあるが、大気ではほとんど行われない。大気の鉛直モード展開を詳しく検討した研究としては、Held et al. (1985) が挙げられる。

11.1 Hoskins Karoly の考察

大規模大気が、SST 偏差に対してどのように応答するかの理論的な枠組みの一つは、Hoskins and Karoly (1981)(以下 HK) によって与えられた。彼らは、

$$\bar{u}\xi'_x + \beta v' = fw'_z \quad (11.1)$$

$$\bar{u}\theta'_x + v'\bar{\theta}_y + w'\bar{\theta}_z = (\theta_0/g)Q \quad (11.2)$$

この2式は、線形化された β 平面での渦度 (ξ) および、温位 (θ) の式である。変数の上線は一般場を、' は偏差を表している。11.2 は、温度風の関係から

$$f\bar{u}v'_z - f\bar{u}_zv' + w'N^2 = Q \quad (11.3)$$

と表すことができる。

HK は v' を最小にする応答が選ばれと仮定した。この仮定は、地球流体では渦位の保存から東西方向には自由に動けるが、南北方向には動き難いので、その南北方向の動きが最小になる運動が選ばれと考えたのであろう。この仮定がどの程度確認されたのかは、残念ながら把握していない。

まず (11.3) でのバランスで、東西移流、南北移流、鉛直移流が支配的である場合に、どれだけの v' の大きさが必要となるかを推定しよう。東西移流が主要であれば、

$$v' \sim QH_Q/f\bar{u} \quad (11.4)$$

となり、もし南北移流が主であれば

$$v' \sim QH_u/f\bar{u} \quad (11.5)$$

となる。ここで、 $H_Q = Q/Q_z$ と、 $H_u = \bar{u}/\bar{u}_z$ は、それぞれ熱源と東西風速の高さスケールである。さらにもし、地表から離れた高さでのみ可能であるけれど、鉛直移流が主であれば、 $w' \sim Q/N^2$ である。この場合、(11.1) の右辺の伸縮は項は $fw'_z \sim fQ/(N^2H_Q)$ で表現される。大規模場の水平スケールが、定在ロスビー波のスケール (波数が $k_s = (\beta/\bar{u})^{1/2}$) よりも大きいのであれば、右辺とバランスするのは (11.1) の左辺のうち、第二項の惑星渦度の移流でなくてはならず、

$$v' \sim fQ/(\beta N^2 H_Q) \quad (11.6)$$

となる。もし鉛直移流でバランスするなら、

$$fQ/(\beta N^2 H_Q) \ll \min(QH_Q/f\bar{u}, QH_u/f\bar{u}) = Q/f\bar{u} \min(H_Q, H_u) \quad (11.7)$$

が成り立たつこととなる。

熱帯では、 f が小さいことと、 H_Q が大きいことから、温位の式のバランスは鉛直移流が主となる。またこの際上述の通り、渦度の式 (11.1) では鉛直の伸縮に対して南北移流がバランスするので、 $w'_z > 0$ である下層では、極向きの風が生じる。この極向きの風はその西に低気圧を伴う。結局、熱帯でのバランスは図 11.1a に示される通りとなる。

(11.7) が成り立たない場合には、上述の通り水平移流が卓越するが、東西移流・南北移流のどちらで温位の式がバランスするかは、(11.4)(11.5) から、 H_Q, H_u の相対的な大きさに決まる。下層での H_u のスケールは 1~2 km であり、これよりも熱源の鉛直スケールがずっと大きいなら、すなわち深い加熱 (*deep heating*) なら、南北移流で加熱とバランスする。つまり、加熱されると極方向から冷たい空気が移動して、バランスが生じる。この場合、その赤道向きの風の東側に低気圧を伴う。また、大規模場 ($k < k_s$) では赤道向きの風は、渦位のバランスから $w'_z < 0$ を必要とするので、鉛直風速は下層の加熱の直上で下降流という、直感とは逆に結果になる。まとめると、中緯度での深い加熱に対するバランスは、図 11.1b に示される通りとなる。

一方、浅い加熱 (*shallow heating*) ($H_Q \sim H_u$) の場合には、下層の加熱はある程度東西移流でもバランスされる。この東西移流によるバランスを考えると、加熱とバランスするために、低温偏差が加熱の西になくなくてはならない。また加熱によって暖められた空気が移流されて、高温偏差が加熱の東に生ずる。温度偏差は気圧偏差と関係し、浅い加熱の上で気圧が一定とすると、静水圧の関係から、低温偏差に高気圧が、高温偏差に低気圧が対応する。さらにこの気圧配置は、加熱の直上で赤道向きの風と地衡流バランスし、上述の大規模場での渦位バランスから、この南北風はまた下降流を伴う。結局中緯度での浅い加熱に対するバランスは、図 11.1c にまとめられる。

11.2 Palmer and Sun (1985) の理論

HK の簡潔な議論は非常に魅力的であるけれど、Palmer and Sun (1985) (以下 PS) は数値計算の結果、中緯度の加熱の直上では下層の収束が生じていることを示した。これは HK の理論とは逆である。全てがひっくりかえって、HK では加熱の東に気圧の谷が生じるのに対して、PS では気圧の峰となる。PS は、この不整合の原因は、温位の式で東西移流と南北移流が相当程度打ち消していることが、この不整合の原因ではないかと推定した。

さらに PS は簡単な 2 層モデルで、等価順圧応答が生じるなら、加熱の東に気圧の峰が来ることを以下のように示した。水平発散 $D' \equiv u'_x + v'_y = -w'_z$ を

$$D' = D_{1,2} \exp i(kx + ly)$$

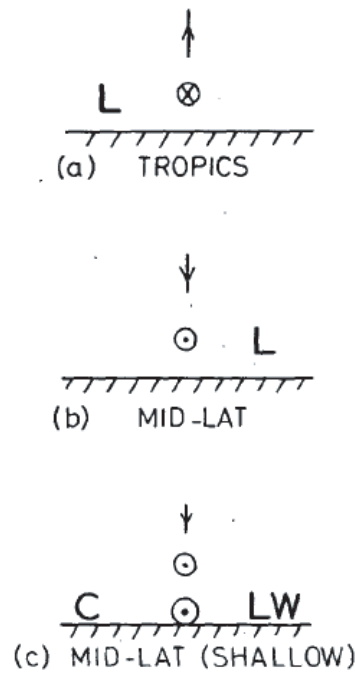


図 11.1: (a) 熱帯, (b) 中緯度, そして (c) 中緯度の浅い強制に対する異なる応答の経度緯度断面. 矢印は鉛直運動を示し, ⊗ は極向き, ⊙ は赤道向きの風を示す. L は気圧の谷を, C と W は冷気と暖気をそれぞれ表す.

地衡流の流線関数を

$$\psi' = i\psi_{1,2} \exp i(kx + ly)$$

ここで添え字 1,2 は, 上層と下層をそれぞれ表す. 渦度の式 (11.1) を, この水平発散と流線関数を用いて書くと,

$$u_{1,2}k(k^2 + l^2)\psi_{1,2} - k\beta\psi_{1,2} = -f_0D_{1,2} \tag{11.8}$$

である. ここで

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 - u_2), \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$$

と書いて, $\delta_u = (u_1 - u_2)/(u_1 + u_2)$ を用いれば (11.8) は

$$\beta k \delta_u \psi_1 = -f_0 D_1 \tag{11.9}$$

$$\beta k \delta_u \psi_2 = +f_0 D_2 \tag{11.10}$$

さらに連続の式から

$$\rho_1 D_1 + \rho_2 D_2 = 0 \tag{11.11}$$

であるから, (11.9) を (11.10) で割って, (11.11) を用いると,

$$\psi_1 \rho_1 = \rho_2 \psi_2 \tag{11.12}$$

という等価順圧応答が得られる. 下層で収束 ($D_2 < 0$) であれば, 渦度方程式 (11.1) の左辺は $\sim \partial\psi_2/\partial x$ なので, その場所で $v_2 > 0$ であり, 等価順圧なので v_1 でもある. この場合, 下層収束の東側で高気圧になる.

下層収束と加熱とがどういう関係を持つべきかが、残された課題である。PS はまず次のようにして、温位の式の水平移流が打ち消しあうとした。温位の式の水平移流を、流線関数を用いて書き直すと

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{1}{\bar{u}}$$

これが 2 層モデルでゼロになるのは、右辺のカッコ内が鉛直方向に一定、すなわち $\psi_1/\bar{u}_1 = \psi_2/\bar{u}_2$ である場合であり、(11.12) からこれは $\bar{u}_1 \rho_1 = \bar{u}_2 \rho_2$ であれば満たされる。PS は両者の比率が 0.85~1 程度で成り立っていると推定した。もとの温位の式に立ち返ると、このことは水平移流がキャンセルすることを意味するので、大気加熱とバランスするのは熱帯同様に鉛直移流となる。すなわち、加熱の直上では上向き風速が生じ、下層収束となる¹。

結局 PS は SST が高く、大気加熱が生じている領域で、下層収束が生じており、その風下（東）側に気圧の峰（HK の気圧の谷ではなく）が来るとした。PS の結果は HK の結果とは逆である。今日より支持されているのは、HK のようである。ただし HK も PS も渦活動に伴う移流という非線形効果を無視する線形モデルなので、気候変動に関して HK または PS で表現できるのは、局所的な線形・傾圧応答であり、大規模場に重要な等価順圧応答には渦活動にともなう運動量輸送²が重要であることが定説となっている。

11.3 Hoskins and Valdes (1990) の数値実験

大規模な大気の東西一様成分からのずれがどのようなメカニズムで、生じているかを数値計算によって調べたのが Hoskins and Valdes (1990)(以下 HV) である。まずここでは、彼らを取り扱ったのは気候変動（例えば季節変動する気候値からずれ）ではなく、気候形成（東西一様成分からのずれ）であることに注意しよう。この二つの現象では、メカニズムは大きく異なっていると今日考えられている。

11.4 Peng の一連の数値実験

11.5 Kushnir et al. (2002) のまとめ

Held, I. M., R. L. Panetta, and R. T. Pierrehumbert, 1985: Stationary external rossby waves in vertical shear. *J. Atmos. Sci.*, 42, 865-883.

Hoskins B. J. and D. J. Karoly, 1981: The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *J. Atmos. Sci.*, 38, 1179-1196.

Hoskins B. J., and P. J. Valdes, 1990: On the existence of storm-tracks. *J. Atmos. Sci.*, 47, 1854-1864.

Palmer T. N. , Z. Sun, 1985: A Modeling and observational study of the relationship between sea-surface temperature in the northwest Atlantic and the atmospheric general-circulation. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 111 (470), 947-975.

¹東西移流と南北移流がおおむねバランスしても、それぞれの頂が鉛直移流よりも 1 桁大きいなら、東西移流と南北移流の残差が鉛直移流よりも一桁小さいためには、東西移流と南北移流は二桁の精度でバランスしなくてはならない。おそらくそこまでバランスすることは無いだろうから、水平移流の残差と鉛直移流とが同オーダーで寄与する方がありそうである。

11.6 東西一様場からのずれの数値計算

Valdes and Hoskins (1989) は、冬季 (12-2月) の東西一様場からのずれを形成するのに、どういった外力が主に働いているのかを、東西一様な定常場について線形化したモデルで研究した。外力は、潜熱放出、地形効果、移動性渦 (transient eddies) で、ECMWF の 1979-84 の 6 年間の冬季の気候値から計算している。その際、総観規模擾乱を取り出すのは 2.5-6 日のバンド・パス・フィルターを用いている。移動性渦による外力としては、渦度の収束と熱の収束を求めている (熱力学方程式と力学方程式にそれぞれ外力となる) (図 11.2)。潜熱放出は、熱力学方程式の残差から推定しており (図 11.3)、その見積もりに不確実性があることは論文でも述べられている。もともとの非線形を含む数値計算結果 (図 11.4) は、このようにして得られた応答の合計 (図 11.5) でよく再現される。そこで応答を、外力ごとに評価すると (図 11.6-図 11.8)、最も重要なのは潜熱放出である。潜熱放出の寄与のうち、さらに熱帯のみの影響を評価すると (図 11.9)、中緯度の流線関数には熱帯の影響が主要であるけれど、なお中緯度での非断熱過熱が一定の寄与を果たしており、高緯度の流線関数には中緯度の非断熱過熱が重要であることが明らかとなった。

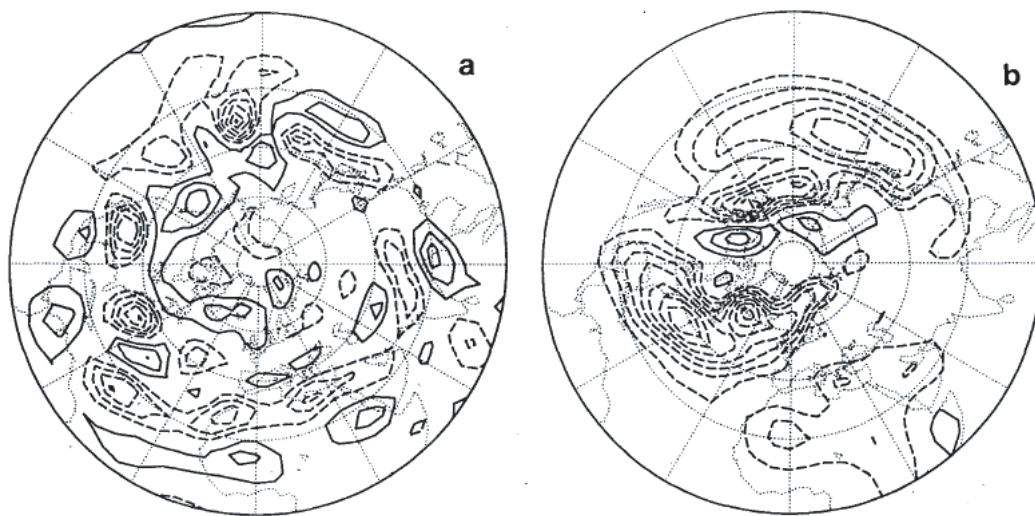


図 11.2: ECMWF 解析による、6 年間の気候値から求められた、移動性擾乱のフラックス収束。(a)200 mb での渦度フラックス収束 (等高線間隔は $2.5 \times 10^{-11} \text{ s}^{-2}$) と、(b)1000 mb での熱フラックスの収束 (等高線間隔は $1 \times 10^{-5} \text{ K s}^{-1}$)

このように中緯度の非断熱加熱が重要であることは、Held et al. (2002) でも確認された。ただし、Nigam et al (1988) では非断熱加熱と地形とは同程度の寄与をもち、Valdes and Hoskins (1989) や Held et al. (2002) よりも地形の寄与が相対的に大きい。従って、中緯度の非断熱加熱の重要性は、ある程度は利用する数値モデルに依存する。なお、Held et al. (2002) は Valdes and Hoskins (1989) よりも 10 年後だけあって、解析の空間解像度も向上しており、その非断熱加熱の分布には、黒潮続流および湾流が明瞭に見えている (図 11.10)。

さらに Hoskins and Valdes (1990) は、ストームトラック北大西洋の $20^{\circ}-80^{\circ}\text{N}$, $80^{\circ}\text{W}-20^{\circ}\text{E}$ の非断熱加熱に対する応答を評価した (図 11.11)。その結果、上層においてロスビー波動伝播が見られるとともに (図 11.11(a))、ストームトラックの形成に重要な下層の傾圧性が非断熱加熱によって生じていることを示した (図 11.11(d))。

11.7 経年変動 (気候値からのずれ) の数値計算

前節で示したように、冬季の気候値の東西平均からのずれには、中緯度での潜熱放出は一定の役割を果たしている。しかし、経年変動については事情はより複雑である。もちろん、中高緯度の SST 偏差がどうい

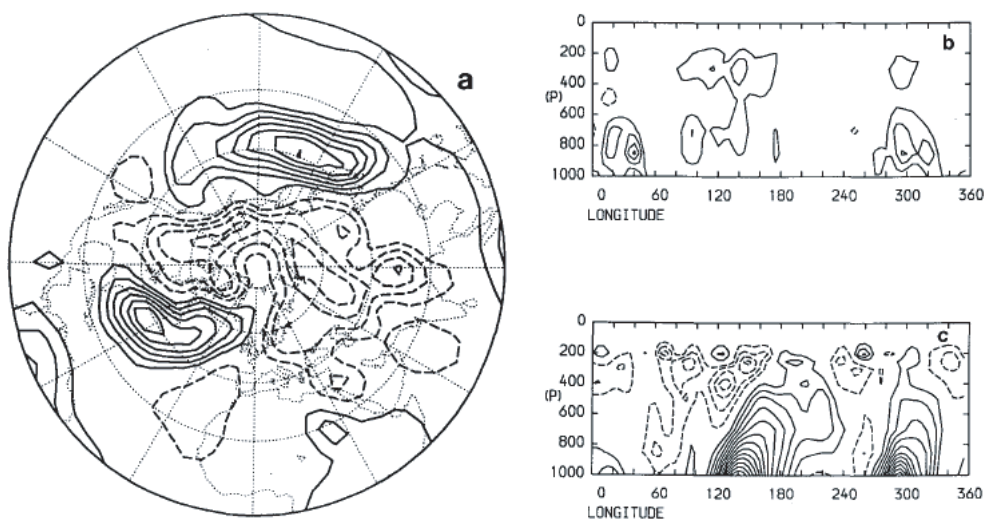


図 11.3: 熱力学方程式の残差から計算される非断熱過熱の, (a) 鉛直積分 (等高線間隔 20 W m^{-2}), (b) 赤道での鉛直断面と (c) 40°N での鉛直断面 (等高線間隔は 0.5 K day^{-1}). ゼロの等高線は描いていない. (after Valdes and Hoskins (1989))

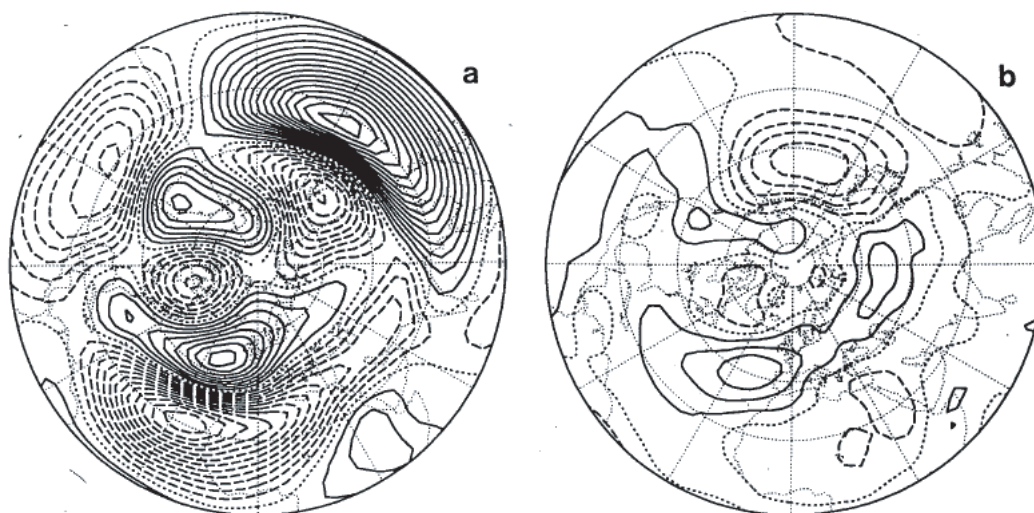


図 11.4: (a) $\sigma = 0.2$ と (b) $\sigma = 0.89$ での流線関数. 等高線間隔は, $7.5 \times 10^{-4} \Omega a^2$ (約 $2.2 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) で, ゼロの等高線は点線で表されている. (after Valdes and Hoskins (1989))

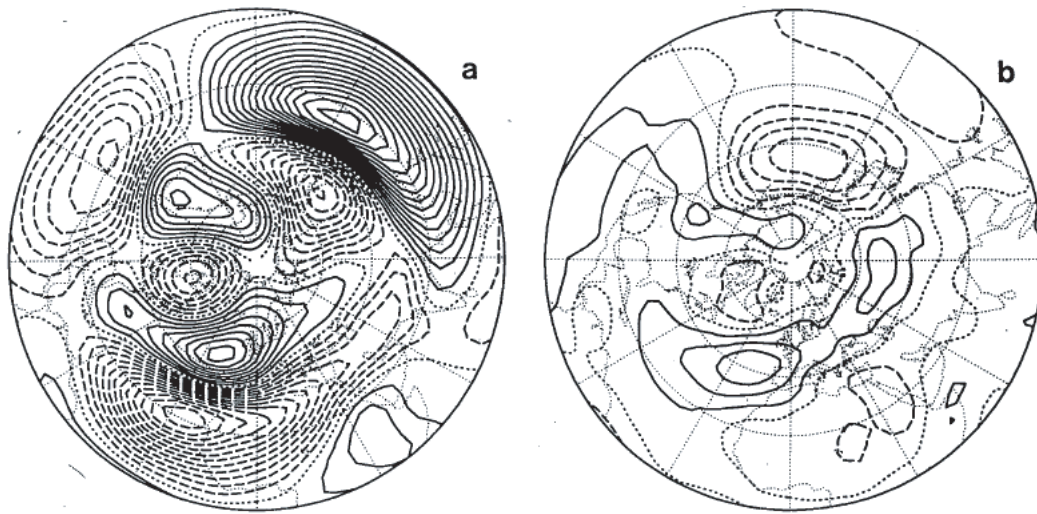


図 11.5: 図 11.4 と同様, ただし地形と潜熱と移動性擾乱の外力の合計に対する線形モデル応答. (after Valdes and Hoskins (1989))

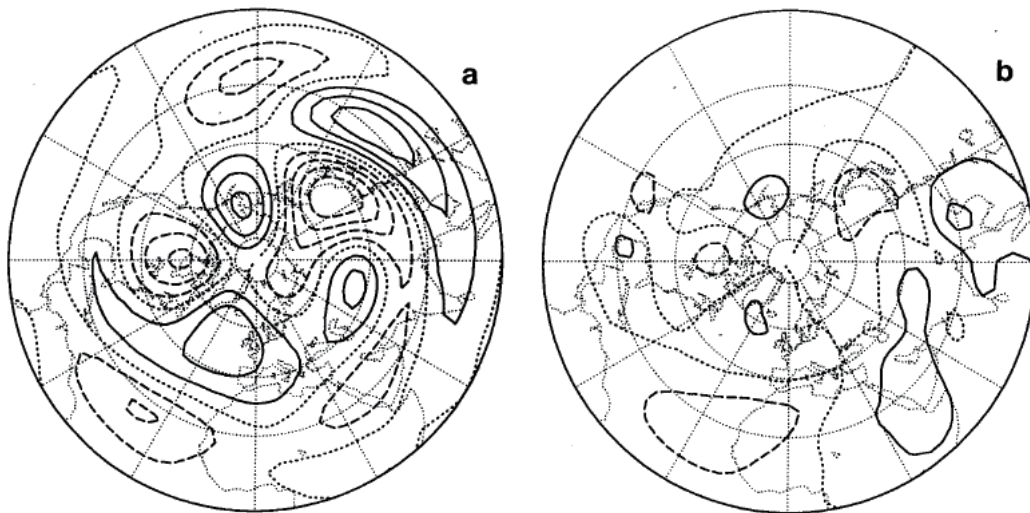


図 11.6: 図 11.4 と同様, ただし地形の外力に対する線形応答. (after Valdes and Hoskins (1989))

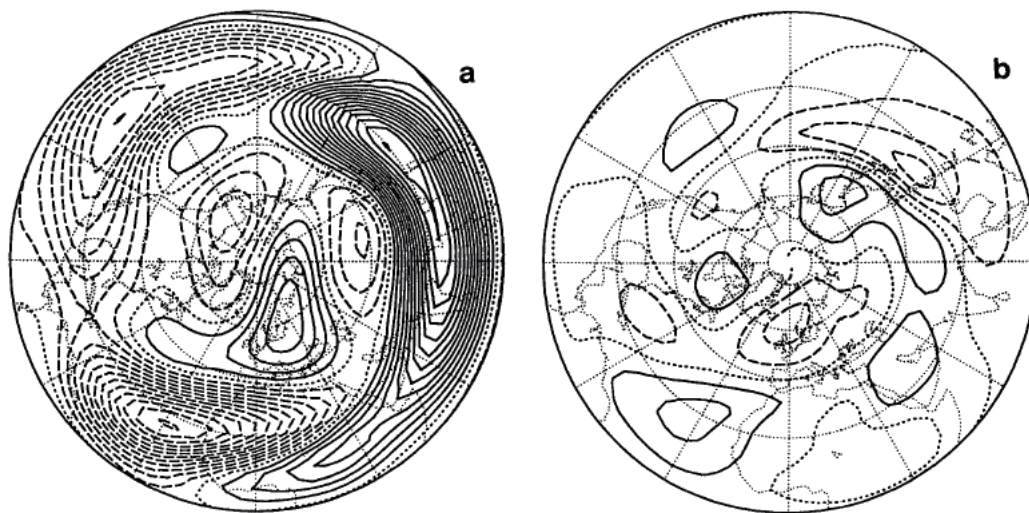


図 11.7: 図 11.4 と同様, ただし潜熱の外力に対する線形応答. (after Valdes and Hoskins (1989))

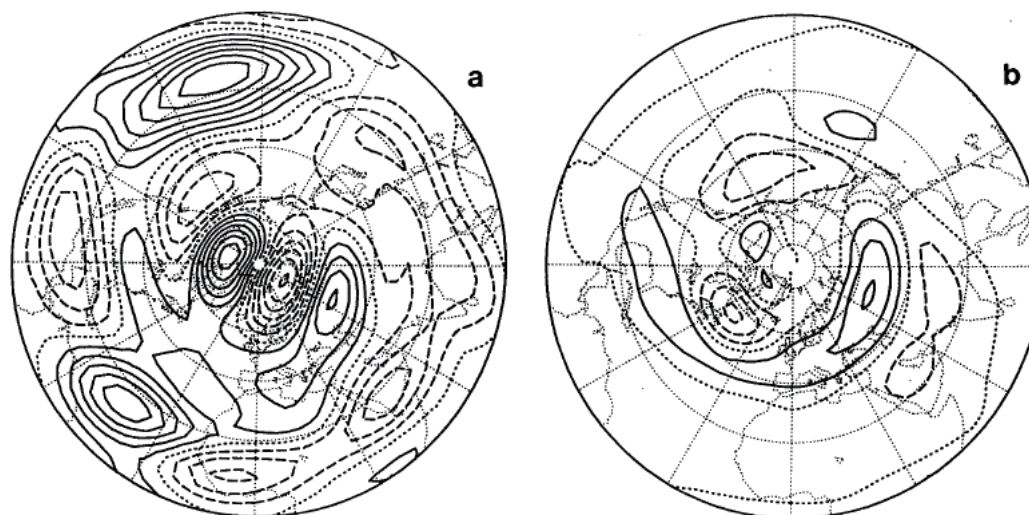


図 11.8: 図 11.4 と同様, ただし移動性擾乱の外力に対する線形応答. (after Valdes and Hoskins (1989))

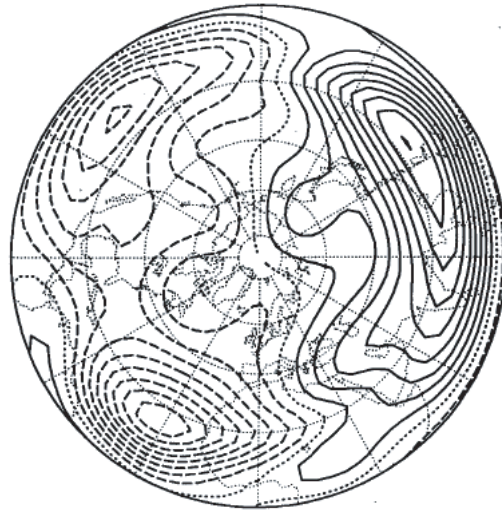


図 11.9: 図 11.7(a) と同様, ただし 20°N 以南のみの潜熱の外力に対して. (after Valdes and Hoskins (1989))

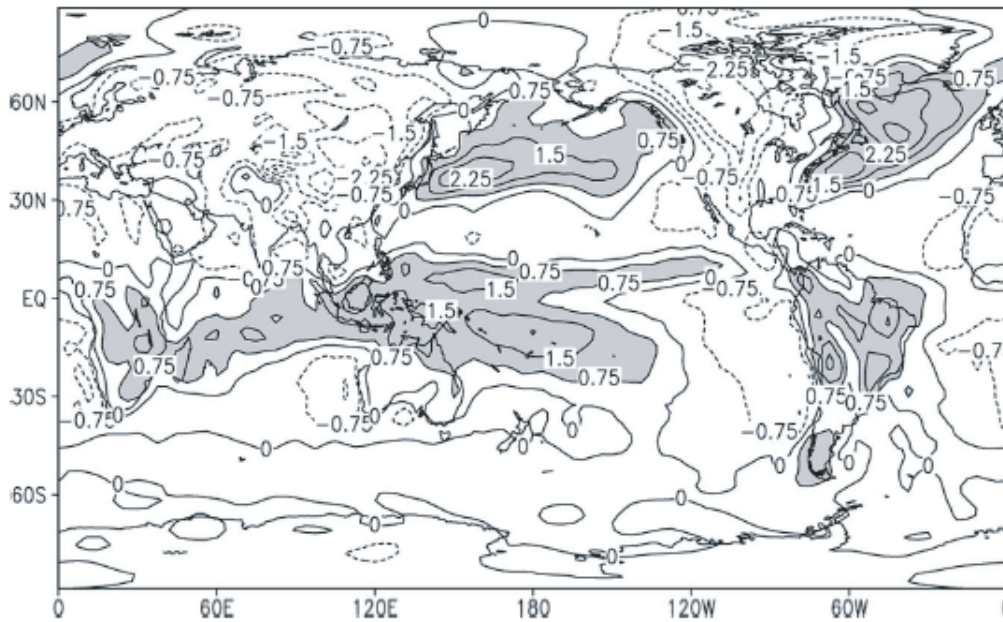


図 11.10: NCEP-NCAR 再解析から得られた, 1月の鉛直平均した非断熱過熱. 等高線間隔は 0.5 K day^{-1} である. (after Held et al., (1989))

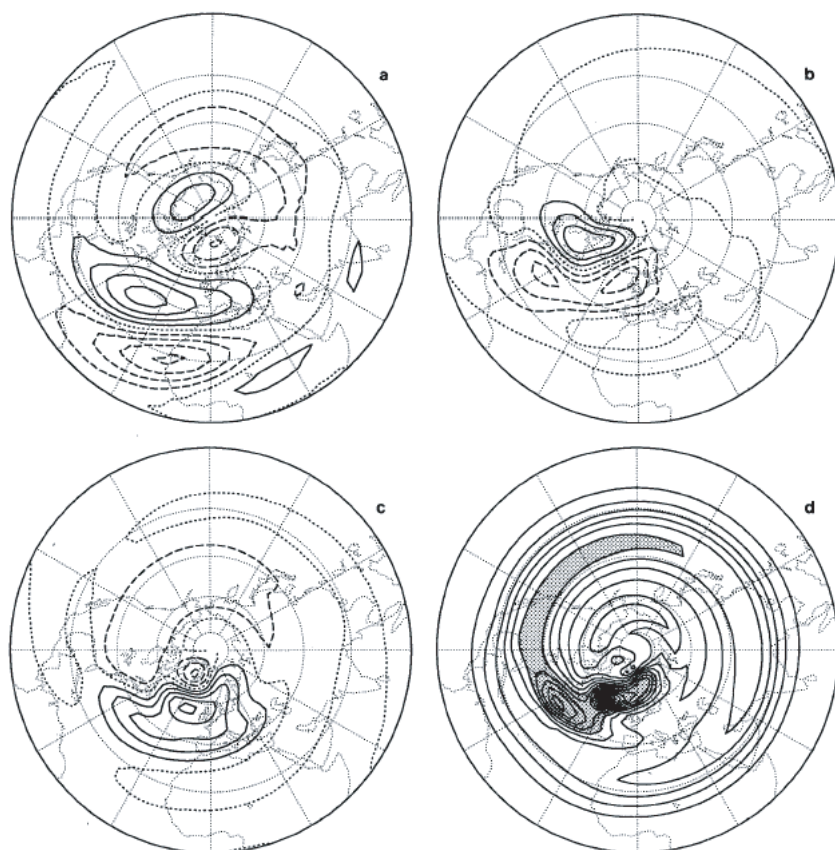


図 11.11: 大西洋中高緯度の非断熱加熱による大気応答で, (a) $\sigma = 0.2$ の流線関数 (等高線間隔は, $5 \times 10^{-4} \Omega a^2$ (約 $1.5 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$)), (b) $\sigma = 0.89$ での流線関数 (等高線間隔は (a) の半分), (c) $\sigma = 0.89$ での温度擾乱 (等高線間隔は 2 K), (d) 傾圧性パラメータ (東西平均プラス擾乱). (after Hoskins and Valdes (1990))

う影響を大気に与えるかは、長く興味を持たれてきた。観測データの解析では、大気変動と SST 変動の間に強い関係が見出されるので、その SST 変動が大気に何か影響しているかもしれないと考えるのは自然である。しかし、まず多くの領域で SST 偏差と、熱フラックス偏差の相関係数を求めると、高温の SST 偏差に対して、大気から海洋に向かう熱フラックス偏差が得られる。このことは、SST 偏差が熱フラックスの結果であり、原因ではないことを意味している。この場合、その SST 偏差が大気変動の原因であるとは想定し難い。ただし、十年変動の時間スケールや、また黒潮・親潮続流域などの限られた領域では、SST 偏差が熱フラックスの原因となっている。

数値計算研究の結果は Kushnir et al. (2002) のレビュー論文にまとめられているが、相当程度にばらついている (表 11.12)。このばらつきの原因は、移動性擾乱が重要であり、移動性擾乱がどう平均場を変えるかは、数値計算の中で表現されている一般流の位置と強さがモデルによって異なるためだとされている。移動性擾乱が重要であることは、S. Peng と共同研究者により一連の研究で明らかにされた。彼女らは、線形モデルに非断熱加熱および、渦活動の変化による効果を外力として与え、前者は傾圧応答、後者は等価傾圧応答を生じさせることを見出した (図 11.13)

Reference	SST anomaly (location and size)	Model resolution	Experimental design	Response pattern
Palmer and Sun (1985)	Western North Atlantic; 3 K	Grid point ~ 330 km with 5 levels	5 sets of 50-day runs with positive and negative SSTA, each starting with different November initial conditions	EqBt high downstream of positive SSTA; 20 m K ⁻¹ at 500 hPa; 1.5 hPa K ⁻¹ at SLP
Pitcher et al. (1988)	North Pacific; 2 and 4 K	Spectral R15 with 9 levels	Perpetual Jan; 1200-day runs with positive and negative SSTA, compared to similar control run	EqBt low downstream of both positive and negative SSTA; 25 m K ⁻¹ at 500 hPa; 1.2 hPa K ⁻¹ at SLP
Kushnir and Lau (1992)	North Pacific; 2 K (similar to Pitcher et al.)	Spectral R15 with 9 levels	Perpetual Jan; positive and negative SSTA and control each for 1350-days and 9 sets of 180-day transient runs	EqBt low downstream of both positive and negative SSTA; slow transient adjustment; 20 m K ⁻¹ or 2 hPa K ⁻¹
Ferranti et al. (1994)	Western North Pacific and North Atlantic; 2 K	Spectral T63 with 19 levels	5 pairs (positive and negative SSTA) of 120-day runs starting with Nov initial conditions and continuing to Feb	Only 500 hPa shown; high (low) downstream of positive (negative) SSTA; 20 m K ⁻¹
Peng et al. (1995)	Western North Atlantic; 3 K	Spectral T42 with 21 levels	50-day positive and negative SSTA and control runs for 6 perpetual Nov and 4 perpetual Jan cases	Downstream of positive SSTA EqBt high in Nov, but EqBt low in Jan; 30-40 m K ⁻¹ or 3 hPa K ⁻¹
Kushnir and Held (1996)	Central North Atlantic; 4 K	Spectral R15 with 9 levels	6000-day perpetual Jan and Oct runs with positive and negative SSTA; parallel runs with idealized GCM	All runs show weak baroclinic response with surface low and upper level high downstream of positive SSTA
Latif and Barnett (1995, 1996)	North Pacific basin; 1 K	Spectral T42 with 19 levels	18-month runs with perpetual Jan conditions, positive and negative SSTA	Positive-negative composite has strong EqBt high downstream of positive SSTA; 5 hPa K ⁻¹ at SLP
Peng et al. (1997)	Central North Pacific; 2.5 K	Spectral T40 with 18 levels	Two cases (perpetual Jan and Feb) each has 4 pairs (positive SSTA and control) of 96-month run	Downstream of positive SSTA EqBt high (10 m K ⁻¹) in Feb but baroclinic low (1 hPa K ⁻¹) in Jan

図 11.12: SST 偏差を与えた大気応答 GCM 実験のまとめ。EqBt は等価傾圧 (Equivalent Barotropic) を意味する。(after Kushnir et al. (2002q))

11.8 観測から示唆される海洋から大気へのフィードバック

大気海洋の同時変化については、多くの解析がなされており、両者に強い関係が成り立っていることが知られている。しかし同時変化では、大気海洋のどちらが原因となって変化を生じさせているのかは同定できない。因果関係が明らかにならないためである。そこで、Ciasto and Thompson (2004) は、より短周期の季節内成分に着目することによって、海洋が大気に及ぼす影響を短かいラゲで同定しようとした。すなわち、彼らは 7 日平均の海洋と大気の場合を、11 月の第一週から 3 月の最終週末までのデータを用い、それから季節変動とそれぞれの冬季平均を取り除いた。こうすることで、経年変動と季節変動が取り除かれ、季節内変動に着目することになる。

11.9 引用文献

Ciasto, L. M., and D. W. J. Thompson, 2004: North Atlantic atmosphere-ocean interaction on intraseasonal time scales. *J. Climate*, 17 (8), 1617-1621.

Czaja A. and C. Frankignoul, 2002: Observed impact of Atlantic SST anomalies on the North Atlantic Oscillation. *J. Climate*, 15, 606-623.

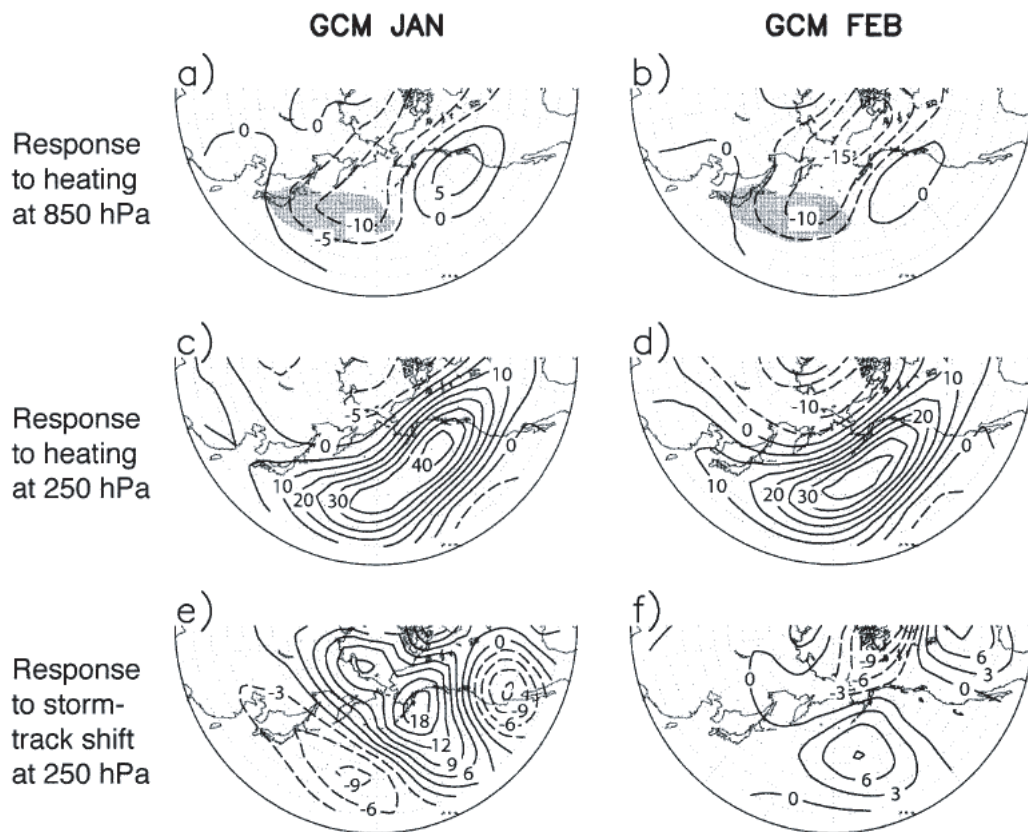


図 11.13: Peng and Whitaker (1999) の, GCM で得られた 1 月と 2 月の気候値について, SST 偏差に対する大気応答. (a)(b)(c)(d) は SST 偏差 ((a)(b) の薄い陰影) に伴う大気加熱による, 線形応答をそれぞれの高度について示す. (e)(f) は, 線形ストーム・トラック・モデルから計算されたジオポテンシャル高度の変化傾向と, 上記の加熱擾乱とに対する線形モデル応答. 等高線間隔は (a)–(d) が 5 m で, (e)(f) が 3 m である. この図は, Peng and Whitaker (1999) に従って, 描きなおされた. (after Kushnir et al. (2002))

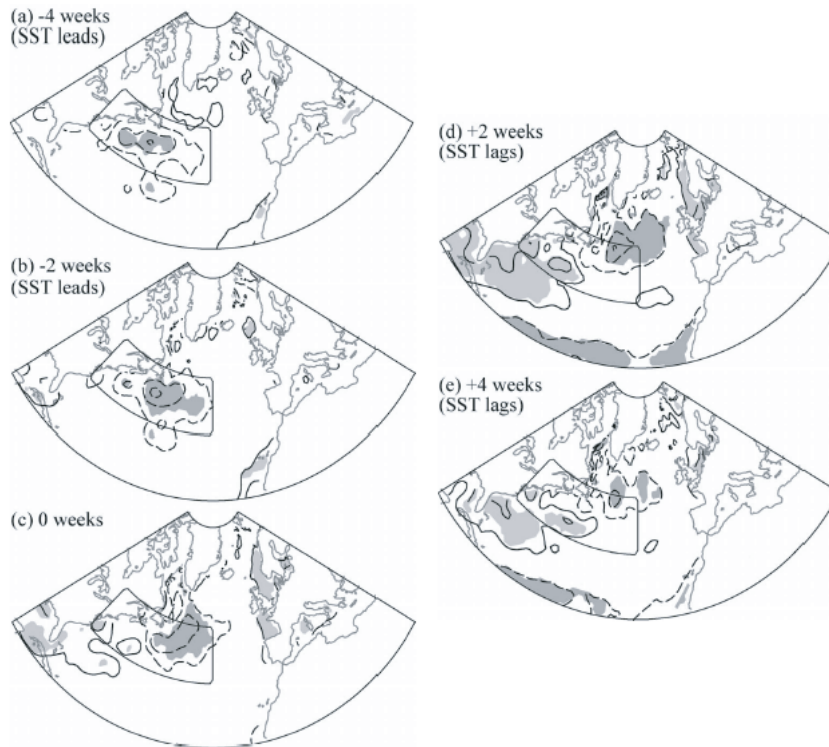


図 11.14: 季節内変動に関する SST 偏差の NAO 偏差へのラグ回帰係数．負の等高線は破線で示され，等高線の値は -0.05° ， 0.05° ， 0.15° ，などである．陰影は，95 を超える領域を示す．SST が先行する

Frankignoul, C., and N. Sennechael, 2007: Observed Influence of North Pacific SST Anomalies on the Atmospheric Circulation. *J. Climate*, 20, 592–606.

Held I. M., M. Ting, and H. Wang (2002) Northern Winter Stationary Waves: Theory and Modeling. *Journal of Climate*, 15, 2125–2144.

Hoskins B. J., and P. J. Valdes, 1990: On the existence of storm-tracks. *J. Atmos. Sci.*, 47, 1854–1864.

Kushnir, Y., Robinson, W. A., Blade, I., Hall, N. M. J., Peng, S., and R. Sutton, 2002: Atmospheric GCM response to extratropical SST anomalies: Synthesis and evaluation. *J. Climate*, 15, 2233–2256.

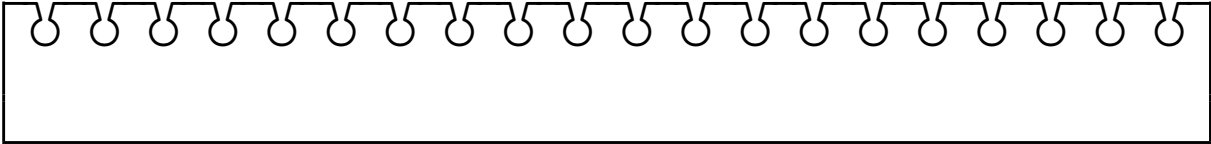
Peng, S., and J. S. Whitaker, 1999: Mechanisms determining the atmospheric response to midlatitude SST anomalies. *J. Climate*, 12, 1393–1408.

–, and W. A. Robinson, 2001: Relationships between atmospheric internal variability and the responses to an extratropical SST anomaly. *J. Climate*, 14, 2943–2959.

–, –, and S. Li, 2002: North Atlantic SST forcing of the NAO and relationships with intrinsic hemispheric variability. *Geophys. Res. Lett.*, 29 (8), 117 (1–4).

Valdes, P. J. and B. J. Hoskins 1989: Linear stationary wave simulations of the time-mean climatological flow. *J. Atmos. Sci.*, 46, 2509–2527.

第12章 十年変動の力学



12.1 大気の色外力への海洋の応答

大気海洋システムを考える上で、最も簡単であるのは

$$\frac{\partial T}{\partial t} + rT = \varepsilon \quad (12.1)$$

これは、一次の自己回帰過程 (First Order Auto-regressive process, AR-1) に他ならない。一般に一次の自己回帰過程は、赤色スペクトルを持つ。このことは次のように証明できる。まず、 $T(t) = \tilde{T} \exp(-i\omega t)$ と、フーリエ変換する。すると上式は

$$-i\omega \tilde{T} + r\tilde{T} = \tilde{\varepsilon}$$

となる。辺々共役複素数を取ってかけると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (-i\omega \tilde{T} + r\tilde{T})(-i\omega \tilde{T} + r\tilde{T})^* = (-i\omega \tilde{T} + r\tilde{T})(+i\omega \tilde{T}^* + r\tilde{T}^*) = (\omega^2 + r^2)|\tilde{T}|^2 \\ \text{右辺} &= |\tilde{\varepsilon}|^2 \end{aligned}$$

であるから、温度のスペクトルは、

$$|\tilde{T}|^2 = \frac{|\tilde{\varepsilon}|^2}{(\omega^2 + r^2)}$$

となり、スペクトルが周波数が低くなるにつれて単調増加する赤色スペクトルとなる。

第13章 準地衡流方程式の数値計算

この章では、準地衡流方程式(*quasi-geostrophic equation*)

$$\frac{d}{dt} (\Delta\psi - R_O^{-2}\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} + J(\psi, \Delta\psi) + \frac{1}{H} J(\psi, H) = \frac{1}{\rho_0} \text{curl} \frac{\vec{\tau}}{H} \quad (13.1)$$

の数値計算の方法を学ぶ。準地衡流方程式ではすでに述べた通り、位相速度が速い重力波を取り除かれるので、時間ステップを長く取ることが可能であり、その利点を生かして空間解像度が高い計算を行うことができる。

13.1 1層浅水浅水準地衡流方程式の差分方程式の解法

より複雑な1.5層(あるいは1層)の非線形項付きの準地衡流方程式の数値解法に進む前に、1層を題材として数値解法の概要を示そう。

準地衡流方程式(2.5)左辺には、時間変化項だけではなく空間変化項も存在することから、数値解法の構成には注意を払わなくてはならない。

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 \varphi_{i,j}^n &\equiv \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &= \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n - 4\varphi_{i,j}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

と約束しよう。すると差分方程式は、

$$\frac{\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n+1} - \nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -\beta \frac{\partial \varphi_{i,j}^n}{\partial x} + v_h \nabla_h^2 (\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n-1}) + \frac{1}{H} \left(\frac{\tau_{i,j+1}^{y,n} - \tau_{i,j-1}^{y,n}}{2\nabla x} - \frac{\tau_{i+1,j}^{x,n} - \tau_{i-1,j}^{x,n}}{2\nabla y} \right)$$

と書くことができる。n+1ステップを求めるときには、右辺の全ての項と左辺の $\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n-1}$ は既知だが、それだけでは $\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n+1}$ が分かるだけで、 $\varphi_{i,j}^{n+1}$ 自体は得られない。 $\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n+1}$ から $\varphi_{i,j}^{n+1}$ を得る必要がある。そこで、

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n+1} &= 2\Delta t \left\{ -\beta \frac{\partial \varphi_{i,j}^n}{\partial x} + v_h \nabla_h^2 (\nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n-1}) + \frac{1}{H} \left(\frac{\tau_{i,j+1}^{y,n} - \tau_{i,j-1}^{y,n}}{2\nabla x} - \frac{\tau_{i+1,j}^{x,n} - \tau_{i-1,j}^{x,n}}{2\nabla y} \right) \right\} + \nabla_h^2 \varphi_{i,j}^{n-1} \\ &\equiv q_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

としよう。 $q_{i,j}^{n+1}$ は既知なので、これは熱源のある2次元領域中の熱伝導方程式の定常解を求めることに他ならない。この2次元ポアソン方程式は、一般にSuccessive over relaxationなどの緩和法を用いて解かれる¹。境界でnon-slipの場合は $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$ であるのはすでに述べた通り。ここで境界で、 $\varphi = 0$ の数値的な扱いには問題が無いであろう。境界に直交する方向の微分がゼロは、境界の1つ外側の点を用意し、その値が境界の1つ内側の点と等しいと置けば良い。すなわち、東西境界では $\varphi_{i-1,j}^n = \varphi_{i+1,j}^n$ が、また南北境界では $\varphi_{i,j-1}^n = \varphi_{i,j+1}^n$ が成立する必要がある。なおslipの場合は $\varphi_{i-1,j}^n = -\varphi_{i+1,j}^n$ などとすればよい。

¹解ければ良いので、Successive over relaxationでなくても良い。解き方は数値計算2で学んでいると思う。知っているよね。

13.2 1.5 層非線形準地衡流差分方程式の解法

解くべき方程式 (5.39) を再度示そう .

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_h \Psi - Ro^{-2} \Psi) + J(\Psi, \Delta_h \Psi) + \beta \Psi_x = -r \Delta_h \Psi + v_h \Delta_h^2 \Psi + \frac{curl(\vec{\tau})}{\rho_0 H} \quad (6.1)$$

この差分方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left[(\Delta \psi_{i,j}^{n+1} - Ro^{-2} \psi_{i,j}^{n+1}) - (\Delta \psi_{i,j}^{n-1} - Ro^{-2} \psi_{i,j}^{n-1}) \right] + J_{i,j}^n(\psi, \Delta_h \psi) + \beta \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ & = -r (\Delta_{i,j}^{n-1} \psi) + v_h \Delta_{i,j}^{n-1} (\Delta_{i,j}^{n-1} \psi) + \frac{1}{\rho_0 H} \left(\frac{\tau_{i,j+1}^{y,n} - \tau_{i,j-1}^{y,n}}{2\Delta x} - \frac{\tau_{i+1,j}^{x,n} - \tau_{i-1,j}^{x,n}}{2\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

である . ただしここで , $\psi_{i,j}^{n+1}$ にプライムが付加されているのは , これが $n+1$ ステップの真の解ではなく仮の解であることを示している . これにさらに Boundary forcing の効果を考慮したものが真の解である . また ,

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j}^{n-1} \psi & \equiv \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} \\ \Delta_{i,j}^{n-1} (\Delta_{i,j}^{n-1} \psi) & \equiv \frac{\Delta_{i-1,j}^{n-1} \psi - 2\Delta_{i,j}^{n-1} \psi + \Delta_{i+1,j}^{n-1} \psi}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{i,j-1}^{n-1} \psi - 2\Delta_{i,j}^{n-1} \psi + \Delta_{i,j+1}^{n-1} \psi}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

である . なお , $J_{i,j}^n(\psi, \Delta_h \psi)$ は Jacobian の差分表現で , これについては後に示す .

(6.2) を書き換えて

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{n+1} & = \Delta \psi_{i,j}^{n-1} - Ro^{-2} \psi_{i,j}^{n-1} \\ & + 2\Delta t \left\{ J_{i,j}^n(\psi, \Delta_h \psi) + \beta \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right. \\ & \left. - r (\Delta_{i,j}^{n-1} \psi) + v_h \Delta_{i,j}^{n-1} (\Delta_{i,j}^{n-1} \psi) + \frac{1}{\rho_0 H} \left(\frac{\tau_{i,j+1}^{y,n} - \tau_{i,j-1}^{y,n}}{2\Delta x} - \frac{\tau_{i+1,j}^{x,n} - \tau_{i-1,j}^{x,n}}{2\Delta y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.3a)$$

$$\Delta \psi_{i,j}^{n+1} - Ro^{-2} \psi_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^{n+1} \quad (6.3b)$$

ここで $q_{i,j}^{n+1}$ は (6.3a) から直ちに求められる . そして , $\psi_{i,j}^{n+1}$ は SOR 等によって (6.3b) から求められる .

さてここで Jacobian の差分表現について説明しよう . Jacobian は , 非線形効果を示すものである . 非線形効果の重要な点の一つは , それが異なる波数間 (長さスケール) の間でエネルギーの輸送を行うということである . この異なる波数間でのエネルギー輸送が生ずることは , 例えば , $u = \cos(kx)$ と仮定したときに , 非線形である u^2 は $u^2 = \cos^2 kx = (1 + \cos 2kx) / 2$ と表されることから推察されるであろう . ここで , 短波長側にエネルギーが輸送される場合に , 数値的に表現できる波長の下限は Grid size で規定されているので , それよりも小さいスケールにエネルギーが輸送されるとそれを表現できないということが生ずる . さらに悪い場合には , 解像度以下の波長へのエネルギー輸送が , より長い波長成分に誤って反映されるということが生ずる . このような不都合を生じさせないためには , 非線形項について性質の良い差分表現を用いれば良いことが , Arakawa によって示されている² . このような性質の良い差分表現は準地衡流方程式については Arakawa Jacobian として知られており ,

$$J_{i,j}^n(\psi, \Delta_h \psi) = J_1 + J_2 + J_3 \quad (6.4a)$$

$$\begin{aligned} J_1 & = \{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\Delta_{i,j+1} \psi - \Delta_{i,j-1} \psi) \\ & - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\Delta_{i+1,j} \psi - \Delta_{i-1,j} \psi)\} / 4 \end{aligned} \quad (6.4b)$$

$$\begin{aligned} J_2 & = \{\Delta_{i,j+1} \psi (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) \\ & - \Delta_{i,j-1} \psi (\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}) \\ & - \Delta_{i+1,j} \psi (\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i+1,j+1}) \\ & + \Delta_{i-1,j} \psi (\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1})\} / 4 \end{aligned} \quad (6.4c)$$

$$\begin{aligned} J_3 & = \{\psi_{i+1,j} (\Delta_{i+1,j+1} \psi - \Delta_{i+1,j-1} \psi) \\ & - \psi_{i-1,j} (\Delta_{i-1,j+1} \psi - \Delta_{i-1,j-1} \psi) \\ & - \psi_{i,j+1} (\Delta_{i+1,j+1} \psi - \Delta_{i-1,j+1} \psi) \\ & - \psi_{i,j-1} (\Delta_{i+1,j-1} \psi - \Delta_{i-1,j-1} \psi)\} / 4 \end{aligned} \quad (6.4d)$$

で与えられる .

²具体的には渦度 , 運動エネルギー渦度の 2 乗 (Enstrophy) が保存すれば良い .

なお, Boundary Forcing を考慮するために, (13.6) をも計算する必要がある. ただしその計算は簡単であり, 差分方程式を示す必要はないであろうから, ここでは差分方程式の表示は割愛する.

13.2.1 境界条件の数値計算への実装***

上の境界条件を用いて解くためには次のようにすればすれば良い. まず, n 時間ステップまで流線関数が既知であるとして, $n+1$ 時間ステップの仮の流線関数 Ψ^{n+1} を, 境界上でゼロを仮定して, 例えば時間に中央差分を用いるのであれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} (\Delta_h \Psi^{n+1} - Ro^{-2} \Psi^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta t} (\Delta_h \Psi^{n-1} - Ro^{-2} \Psi^{n-1}) \\ & = -J(\Psi, \Delta_h \Psi) - \beta v_0 - r \Delta_h \Psi + v_h \Delta_h^2 \Psi + \frac{curl(\vec{\tau})}{\rho_0 H} \end{aligned} \quad (13.2)$$

などとして求める. 次に

$$\Delta_h \Psi'' - Ro^{-2} \Psi'' = 0 \quad (13.3)$$

$$\Psi'' = 1 \text{ at boundary} \quad (13.4)$$

を満たす流線関数 Ψ'' を用いて解を,

$$\Psi^{n+1} = \Psi'^{n+1} + c(t) \Psi'' \quad (13.5)$$

と表すこととすれば, 質量保存式 (13.2) を満たすために,

$$\iint \Psi^{n+1} dx dy = \iint \Psi'^{n+1} + c(t) \Psi'' dx dy = 0$$

より,

$$c(t) = - \frac{\iint \Psi'^{n+1} dx dy}{\iint \Psi'' dx dy} \quad (13.6)$$

として $c(t)$ を求めることができる.

13.3 数値計算プログラム

本プログラムは理学研究科・地球惑星科学専攻・地球惑星流体科学講座・海洋物理学研究室の建部氏が作成したものである.

%見たままで印刷

* Quasi-Geostrophic Model for 1.5 layer.

* Rectangle Ocean, Using SOR for solving Poisson-Eq.

*

```
parameter (im=62,jm=42)
dimension stlapnow(im,jm) !laplacian of stream function
dimension stlapprv(im,jm)
dimension pois (im,jm)
dimension stbnd(im,jm)
dimension sttmp(im,jm)
dimension stnow(im,jm)
dimension stprv(im,jm)
dimension h0(im,jm)
dimension taux(im,jm),tauy(im,jm)
common /params/ vish,beta,hs,cl,ramda2,r2
integer day,daymx
```

```

c      constant number set
      r1=1.0252e+3
      r2=1.0268e+3
c      dx=100.*1000.
c      dt=43200.
      dx=100.*1000./2
      dt=86400./4
      daymx=365*20
      noutm=365*4
      hs=500.
c      Reduced Gravity
      g=(r2-r1)*9.8/r1
c      vish=5.55e+4
      vish=5.e+2      ! if vish=5.55e, numerical instability occurs
      tau0=0.1
      do 10 j=1,jm
      do 10 i=1,im
c          taux(i,j)=-tau0*cos(3.1416*(float(j)-2.)/float(jm-2))
          taux(i,j)=-tau0*cos(3.1416*(float(j)-2.)/float(40))
          if (j.gt.20) then
              taux(i,j)=-0.5*tau0*cos(3.1416*(float(j)-2.)/float(40))
          endif
          tauy(i,j)=0.0
10      continue
      flat=30.0
      fcoli0=2.*(2.*3.1416)/(24.*3600.)*sin(flat*3.1416/180.)
      print *,'fcoli0=',fcoli0
      beta=2.*(2.*3.1416)/(24.*3600.)*cos(flat*3.1416/180.)/6.4e+6
      ross=sqrt(g*hs)/fcoli0
      ramda2=ross**(-2)
      c1=fcoli0/g
c      Boundary Force
      call filldm(pois,0.,im*jm)
      bndval=1.
      call sor(stbnd,pois,im,jm,dx,ramda2,bndval,k,eps)
      stbndsm=0
      do 20 j=3,jm-2
      do 20 i=3,im-2
          stbndsm=stbndsm+stbnd(i,j)
20      continue
      stbndsm=stbndsm+(2*(im-1 -1)*(1/2.)) +(2*(jm-1 -1)*(1/2.))
      iwrt=21
      open(iwrt,file='sensui3.dat',form='unformatted',access='direct',
&          status='unknown',recl=im*jm*4)
      do 100 ntime=1,daymx*4
          if (ntime .eq. 1) then
              nout=nout+1

```



```

        call onestp(stnow,stprv,pois,stlapnow,stillapnow,
&                im,jm,dx,dt,taux,tauy)
    else
        if (mod(ntime,16).eq.1) then
            call sbst12(stnow,stprv,im*jm)
            call sbst12(stlapnow,stlapprv,im*jm)
            call onestp(stnow,stprv,pois,stlapnow,stlapprv,
&                im,jm,dx,dt,taux,tauy)
        else
            call onestp(stnow,stprv,pois,stlapnow,stlapprv,
&                im,jm,dx,2*dt,taux,tauy)
        endif
    endif
    bndval=0.
    call sor(sttmp,pois,im,jm,dx,ramda2,bndval,k,eps)
c    print *, 'k=',k
    tmpsum=0
    do 110 j=2,jm-1
    do 110 i=2,im-1
        tmpsum=tmpsum+sttmp(i,j)
110    continue
    c=-tmpsum/stbndsm
    call sbst12(stnow,stprv,im*jm)
    do 120 j=1,jm
    do 120 i=1,im
        stnow(i,j)=sttmp(i,j)+c*stbnd(i,j)
        h0(i,j)=c1*stnow(i,j)+hs
        if (h0(i,j).lt.0.) then
            write(6,*) 'ntime=',ntime, 'h0=',h0(i,j),' <0'
            stop
        endif
120    continue
    call sbst12(stlapnow,stlapprv,im*jm)
    call gtstlap(stlapnow,stnow,im,jm,dx,dy)
    if (mod(ntime-1,noutm) .eq. 0) then
        nout=nout+1
        write(iwrt,rec=nout) h0
        write(6,*) day,h0(4,10),k,eps
    end if
    day=anint(float(ntime)*dt/86400.)
    if (day .gt. daymx) then
        write(6,*) 'end of day at =',day
        go to 101
    endif
100    continue
101    continue
    stop

```

```

end
c
subroutine onestp(stnow,stprv,pois,slapnow,slapprv,
&                im,jm,dx,dt,taux,tauy)
dimension stnow (im,jm)
dimension stprv (im,jm)
dimension pois (im,jm)
dimension slapnow(im,jm)
dimension slapprv(im,jm)
dimension taux(im,jm),tauy(im,jm)
common /params/ vish,beta,hs,cl,ramda2,r2
real jacobi
dx2=dx*2
dpx2=dx**2
dx2iv=1/dx2
dpx2iv=1/dpx2
print *,'dx=',dx,' r2=',r2,' hs=',hs
rhsiv=1/(r2*hs)
print *,'rhsiv=',rhsiv
c
do 100 j=3,jm-2
do 100 i=3,im-2
c Arakawa jakobian
tn1=( stnow(i+1,j)-stnow(i-1,j))
&    *(slapnow(i,j+1)-slapnow(i,j-1))
&    -(stnow(i,j+1)-stnow(i,j-1))
&    *(slapnow(i+1,j)-slapnow(i-1,j)))*0.25
tn2=(slapnow(i,j+1)*(stnow(i+1,j+1)-stnow(i-1,j+1))
&    -slapnow(i,j-1)*(stnow(i+1,j-1)-stnow(i-1,j-1))
&    -slapnow(i+1,j)*(stnow(i+1,j+1)-stnow(i+1,j-1))
&    +slapnow(i-1,j)*(stnow(i-1,j+1)-stnow(i-1,j-1)))*0.25
tn3=(stnow(i+1,j)*(slapnow(i+1,j+1)-slapnow(i+1,j-1))
&    - stnow(i-1,j)*(slapnow(i-1,j+1)-slapnow(i-1,j-1))
&    - stnow(i,j+1)*(slapnow(i+1,j+1)-slapnow(i-1,j+1))
&    + stnow(i,j-1)*(slapnow(i+1,j-1)-slapnow(i-1,j-1)))
jacobi=(tn1+tn2+tn3)/3.
pois(i,j)=slapprv(i,j)-ramda2*stprv(i,j)+dt* (
&    -jacobi*dpx2iv
&    -beta*(stnow(i+1,j)-stnow(i-1,j))*dx2iv
&    +vish*(slapprv(i+1,j)-2.*slapprv(i,j)+slapprv(i-1,j))
&    *dpx2iv
&    +vish*(slapprv(i,j+1)-2.*slapprv(i,j)+slapprv(i,j-1))
&    *dpx2iv
&    +rhsiv*(tauy(i+1,j)-tauy(i-1,j))*dx2iv
&    -rhsiv*(taux(i,j+1)-taux(i,j-1))*dx2iv
&
)
100 continue

```

```

c
    do 200 i=2,jm-1
        pois(i,2) =0.0
        pois(i,jm-1)=0.0
200    continue
    do 210 j=2,jm-1
        pois(2,j) =0.0
        pois(im-1,j)=0.0
210    continue
    return
    end

c
    subroutine sor(stnow,pois,im,jm,dx,ramda2,bndval,k,eps)
    dimension stnow(im,jm)
    dimension pois(im,jm)
    real norm, rmag
    w=1.0

c
    do 10 i=2,im-1
        stnow(i,2)=bndval
        stnow(i,jm-1)=bndval
10    continue
    do 20 j=2,jm-1
        stnow(2,j)=bndval
        stnow(im-1,j)=bndval
20    continue

c
    k=0
5    norm=0.0
    rmag=0.0
    do 100 j=3,jm-2
    do 100 i=3,im-2
        e=w*((stnow(i-1,j)+stnow(i+1,j)+stnow(i,j-1)+stnow(i,j+1)
&          -dx*dx*pois(i,j))/(4.0+ramda2*dx*dx)-stnow(i,j))
        stnow(i,j)=stnow(i,j)+e
        norm=norm+abs(e)
        rmag=rmag+abs(stnow(i,j))
100    continue
    do 200 i=1,im
        stnow(i,1) = stnow(3,j)
        stnow(i,jm)= stnow(i,jm-2)
200    continue
    do 210 j=1,jm
        stnow(1,j) = stnow(3,j)
        stnow(im,j)= stnow(im-2,j)
210    continue
    k=k+1

```

```

if (k .gt. 2000) then
  write(6,*) 'iteration with 2000 times failed (not congerged)'
  write(6,*) 'norm=',norm, ' rmag=',rmag
  stop
end if
eps=norm/rmag
if (eps .gt. 1.e-4) go to 5
return
end

c
subroutine gtstlap(stlap,st,im,jm,dx,dy)
dimension stlap(im,jm),st(im,jm)
dxp2iv=1/(dx*dx)
dy=dx
dyp2iv=1/(dy*dy)
do 100 j=2,jm-1
  do 110 i=2,im-1
    stlap(i,j)=(st(i+1,j)-2*st(i,j)+st(i-1,j))*dyp2iv
    &          +(st(i,j+1)-2*st(i,j)+st(i,j-1))*dyp2iv
110  continue
100  continue
do 200 i=1,im
  stlap(i,1) =stlap(i,3)
  stlap(i,jm)=stlap(i,jm-2)
200  continue
do 210 j=1,jm
  stlap(1,j) =stlap(3,j)
  stlap(im,j)=stlap(im-2,j)
210  continue
return
end

*****
subroutine sbst12(dim1,dim2,nsiz)
dimension dim1(nsiz),dim2(nsiz)
do 100 n=1,nsiz
  dim2(n)=dim1(n)
100  continue
return
end

*****
subroutine filldm(dim,val,nsiz)
dimension dim(nsiz)
do 100 n=1,nsiz
  dim(n)=val
100  continue
return
end

```

第14章 Appendix A. 数学メモ

この章では本編で利用する数学について、学んだことはあるが忘れていた私のような人の助けとなるように、メモにまとめている。

14.1 初等関数

14.1.1 三角関数

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{オイラーの公式}$$

$$\begin{aligned}\cos(x) &= (e^{+ix} + e^{-ix}) / 2, \\ \sin(x) &= (e^{+ix} - e^{-ix}) / (2i), \\ \tan(x) &= \sin(x) / \cos(x), \\ \cot(x) &= 1 / \tan(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= (e^{+x} + e^{-x}) / 2, \\ \sinh(x) &= (e^{+x} - e^{-x}) / 2, \\ \tanh(x) &= \sinh(x) / \cosh(x), \\ \coth(x) &= 1 / \tanh(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(0) &= 1, & \sinh(0) &= 0, \\ \cos(0) &= 1, & \sin(0) &= 0\end{aligned}$$

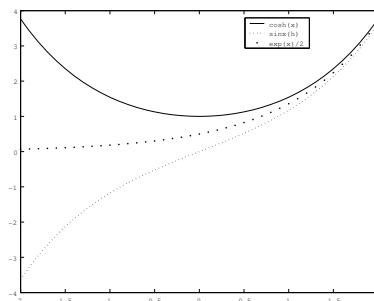


図 14.1: cosh と sinh. $\rightarrow +\infty$ では $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ とも $\exp(x)/2$ に, $\rightarrow -\infty$ では $\cosh(x)$ は $\exp(-x)/2$ に, $\sinh(x)$ は $-\exp(-x)/2$ に漸近する。

14.2 外力がある場合の一階線形偏微分方程式の解法

一般に外力があると解を得るのが簡単ではない。しかし、一階線形偏微分方程式については、最終的に常微分方程式に帰着して、それを積分することで解を得ることができる。この場合積分は特性曲線 (characteristics) に沿って行われる。この特性曲線は、同次の一階線形偏微分方程式が持つ伝播速度によって定まる。特に伝播速度が一定であれば、特性曲線は直線となる。

一階線形偏微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial u}(, t) + c \frac{\partial}{\partial u}(, x) = F \quad (14.1)$$

と書ける。

14.3 スツルム・リュービル型の固有値・固有関数問題

弦の振動数は、飛び飛びの固有振動数を持ち、それぞれに特有の振動のパターンを持つ。こういった問題は固有値・固有関数問題として扱われ、その中でも特にスツルム・リュービル型の固有値・固有関数問題は重要である。このスツルム・リュービル型の固有値・固有関数問題は、6 章の赤道波、および 8 章の鉛直モード展開で用いられる。

スツルム・リュービル型の固有値問題とは、微分方程式が

$$\frac{d}{dx} \left[p(y) \frac{df}{dx} \right] - q(x)f + \lambda r(x)f = 0$$

で、境界条件が同次の場合

$$a_1 f + b_1 df/dx = 0 \quad x = x_1$$

$$a_2 f + b_2 df/dx = 0 \quad x = x_2$$

に成立する。なおここで、 f が解かれるべき未知関数、 p, q, r はあらかじめ与えられる関数、 a_i, b_i は定数である。上の微分方程式のポイントは、 f の 1 階微分と 2 階微分は、左辺第一項からしか出てこないことである。その代表的な例は $p(y) = \text{一定}$ である。

スツルム・リュービル型の固有値問題が成立する場合、以下の性質が成り立つ

- 無限の固有値があり、それらの固有値に確定する最小値が存在する。

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow \infty$$

- 一つの固有値 λ_n に一つの固有関数 f_n が対応する。
- 異なる固有値に対応する固有関数 $f_n(x), f_m(x), (n \neq m, \lambda_n \neq \lambda_m)$ は、重み関数 $r(x)$ について直交する。すなわち、

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0$$

である。

14.4 エルミート関数の漸化式

エルミート関数は 6 章の赤道波で利用する。エルミート関数および他の特殊関数を使う上で大事なのは、ある次数のエルミート関数を微分したら、他の次数のエルミート関数でどう表されるか、である。ある関数を微分して自分自身になるのは、 \exp とその表裏一体の表現である \sin, \cos しかない。したがって、たとえば

$e^{nx}/dx = ne^{nx}$ と、 n 次の \exp を微分したら、 n 次の \exp が出てくるだけだったが、特殊関数ではそうはいかないのである。このようにある次数の関数を、他の次数の関数で表す式を、漸化式 (recurrence equation) という。

エルミート関数の漸化式は、

$$\frac{d\psi_n}{dy} - y\psi_n + \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1} = 0 \quad (14.2)$$

$$\frac{d\psi_n}{dy} + y\psi_n - \sqrt{2n}\psi_{n-1} = 0 \quad (14.3)$$

である。ただし、後者の $n = 0$ については

$$\frac{d\psi_0}{dy} + y\psi_0 = 0 \quad (14.4)$$

となる。また、(14.2)(14.3) を辺々足し引きすると

$$y\psi_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1} \quad (14.5)$$

$$\frac{d}{dy}\psi_n = -\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1} \quad (14.6)$$

が得られる。