4.　周波数領域の２変量解析（クロススペクトルとコヒーレンシー） 1
4.1.　クロススペクトル 1
4.2.　Squared coherency 2
4.3.　入出力応答関数と説明される分散 2
4.4.　Squared coherency の有意水準 2
4.5.　コヒーレンスの有意水準のテスト 3
4.6.　位相スペクトルの信頼限界 4
4.7.　コヒーレンシー利用の利益 5

4.　周波数領域の２変量解析（クロススペクトルとコヒーレンシー）

4.1.　クロススペクトル

スペクトルの際と同様に，時系列 y_n のフーリエ変換を次のように，Y_k と定義する．

$$Y_k = \Delta t \sum_{n=1}^{N} y_n \exp(-i\,2\pi\, f_k n\Delta t)$$
$$= \Delta t \sum_{n=1}^{N} y_n \exp(-i\,2\pi\, kn/N); \qquad f_k = k/(N\Delta t),\ k = 0,\ldots.,N$$

生のクロススペクトル(Cross Spectrum)は Two sided spectral density で

$$S_{12}(f_k) = \frac{1}{N\Delta t}\left[Y^*{}_1(f_k)Y_2(f_k)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots..,N-1$$

One-sided spectral density では

$$G_{12}(f_k) = \frac{2}{N\Delta t}\left[Y_1^*(f_k)Y_2(f_k)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots.N/2$$

と定義される．生のクロススペクトルは，適切な方法で平滑化する必要がある．以下 S_{12}, G_{12} は平滑化されたクロススペクトルとする．通常用いられる平滑化の方法は，(単一時系列のスペクトル推定と同様に）周波数領域での平滑化か overlapping する時間領域分割である．

　クロススペクトルは（単一時系列のスペクトルとは異なって）複素数であるので，次のようにして

$$S_{12}(f) = |S_{12}(f)|\exp(i\phi_{12}(f))$$

クロススペクトルの位相(**phase**)$\phi_{12}(f)$が定義される．もしクロススペクトルを計算する二つの時系列が，

$$x_k = A_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k)$$

と同じ周波数で異なる振幅・位相を持っているとすれば，クロススペクトルは，

$$S_{12}(f) = \frac{A_1(f)A_2(f)}{T}\exp[i(\phi_2(f) - \phi_1(f))]$$

となるので，位相$\phi_{12}(f)$は二つの時系列間の位相差に他ならない（$\phi_{12}=\phi_2-\phi_1$）.

4.2. Squared coherency

実用上はクロススペクトル自体ではなく，クロススペクトルの２乗を各々のスペクトルで割ったコヒーレンシー・スペクトル(Coherency spectrum あるいは squared coherency, coherence-squared function とも呼ばれる)の方が良く用いられる．Squared coherency は

$$\gamma_{12}^2(f_k)=\frac{|G_{12}(f_k)|^2}{G_{11}(f_k)G_{22}(f_k)}=\frac{|S_{12}(f_k)|^2}{S_{11}(f_k)S_{22}(f_k)} \tag{4.1}$$

と定義される．また２乗しない coherency を，

$$\gamma_{12}(f_k)=|\gamma_{12}^2(f_k)|^{1/2}\exp(i\phi_{12}f_k)$$

として定義できる．ここで，ϕ_{12}はコヒーレンシーの位相(phase)で，クロススペクトルの位相と同一である（Emery and Thompson 1999, pp. 486 のように偏角に-をつける流儀もある.）．混乱を避けるために，ϕ_{12}が正・負の時に，時系列y_1, y_2のどちらが位相が先行しているのかを明記しておくこと（例えば位相差が正なら気温が気圧に先行するというように書いておく）．こうしておけば，式の上の偏角の定義におけるマイナス記号の有無は全く問題とはならない．

なお，$|\gamma_{12}(f_k)|$と$\gamma_{12}^2(f_k)$のどちらも coherence と呼ばれることがあるので，混乱をさけるために，(4.1)を用いて，**squared coherency （２乗コヒーレンシー）**と呼ぶことを推奨する．

4.3. 入出力応答関数と説明される分散

次のように周波数空間で線形システムのアドミッタンス(admittance)が定義される．

$$H_{12}(f_k)=\frac{S_{12}(f_k)}{S_{11}(f_k)}=\frac{G_{12}(f_k)}{G_{11}(f_k)}=|H_{12}(f_k)|\exp(i\phi_{12}(f_k))$$

アドミッタンスはゲイン(gain)とも呼ばれる．これらはスペクトル空間での回帰係数のようにふるまう．

また，squared coherencyγ_{12}^2は二つの時系列の相互関係が線形関係で説明する場合の，各周波数毎の説明される分散の割合の最大値でもある．

4.4. Squared coherency の有意水準

Squared coherency の信頼範囲は算出が容易で，1-α×100%の信頼範囲は(αの有意水準)算出が容易で，

$$\gamma_{1-\alpha}^2=1-\alpha^{1/(N_e-1)}, \tag{4.2}$$

で求めることができる(Emery and Thomson 1999, pp 488)．ここでN_eはスペクトル推定における等価自由度(3.15)である．Emery and Thomson (1999, pp. 488) には，この信頼範囲が白色ノイズに対

して妥当なことを述べている．より正確には，スペクトルを平滑化する周波数範囲でスペクトルのレベルがそれほど変わらない，すなわち局所的に白色(locally white)であるとみなせるのであれば，上の信頼範囲は妥当な結果を示す．例えば，この信頼範囲が通常観測される程度の赤色ノイズについて妥当なことはモンテカルロ法によって容易に示すことができる．ただし非常に redness が強い場合は，低周波数領域においてモンテカルロ法で得られる squared coherency の方が大きくなり，上式は過小評価となる．

4.5. コヒーレンスの有意水準のテスト

コヒーレンスについても，ゼロパッティングが行われ，またテーパーが施されている場合の自由度は，文献に紹介されていないようである．そこで，いくつかの場合について試してみた．ずれる場合もあるが，ずれはそれほど大きくなく，かつ理論値がほとんどの場合観測値を上回っているので（つまり有意と判定されづらい．これを保守的な立場(conservative)という），実用的な問題はないであろう．

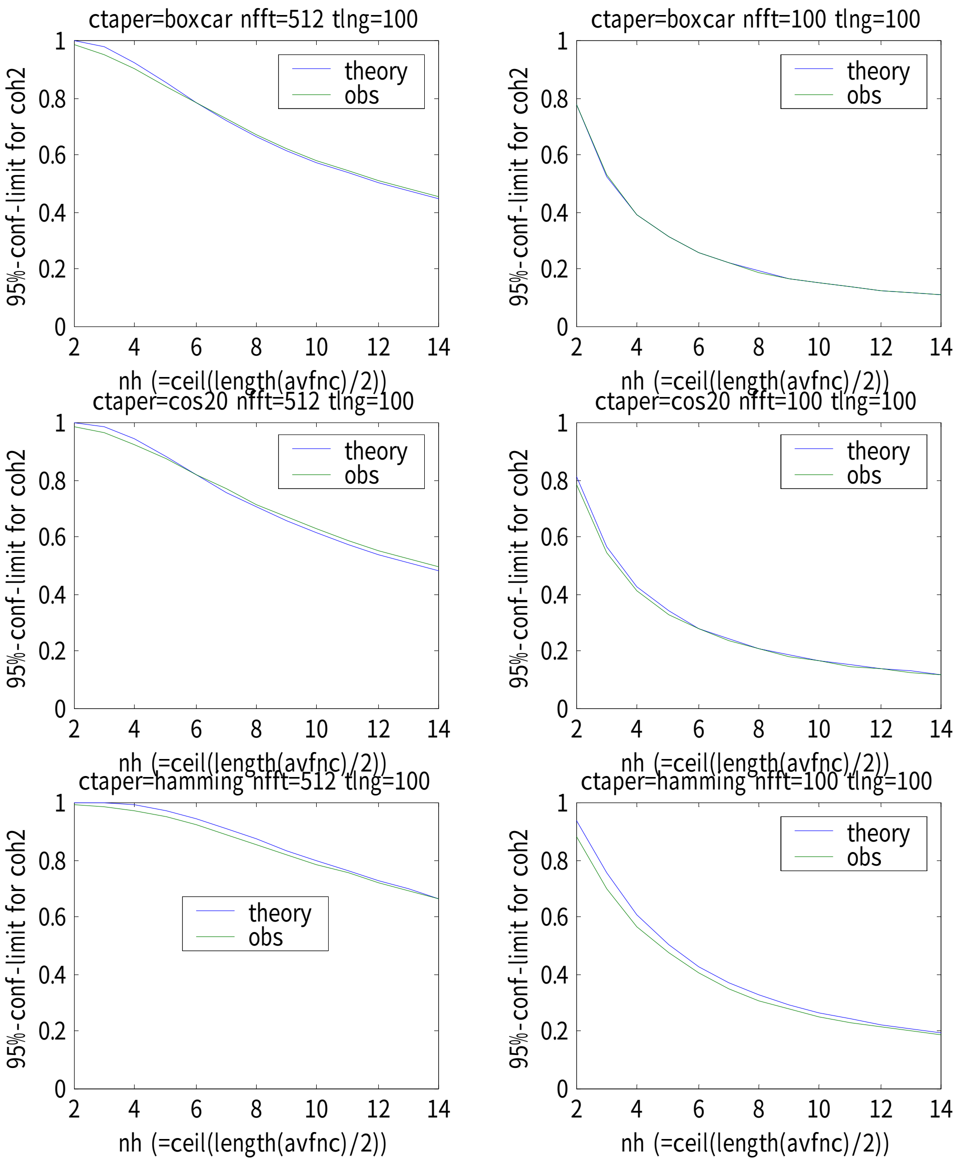

図１．nh*2-1 点の移動平均で平滑化した squared coherency の 95%信頼限界の理論値と観測値．観測値は白色ノイズ時系列を 1000 個生成し，そのペアについて squared coherency 計算して，上位 5%の値を周波数空間で平均して求めた．この際，端から nh 点は平均に使っていない．等価自由度は，sum(avfnc)=1 に規格化した上で，(1+(1/sum(avfnc.^2)-1)*tlng/nfft*mean(taper))によって求めている．

4.6.　位相スペクトルの信頼限界

Storch and Zwiers (1999, p. 285) は，Hannan (1970)が以下のように位相スペクトルの p×100%信頼限界が

$$\phi_{12} \pm \sin^{-1}\left(\frac{t_{(1+p)/2}}{r-2}\left(\gamma_{12}^{2}(\omega)^{-1}-1\right)\right) \tag{4.3}$$

で近似的に得られることを示していると述べている．ここで，r はスペクトル推定の等価自由度で，$t_{(1+p)/2}$ は t(r-2)分布の(1+p)/2 critical value，つまり ICDF である．

4.7. コヒーレンシー利用の利益

コヒーレンシーを利用する場合には，大きく二つのメリットがある．

１．相関係数の有意水準の検定のように，自由度を推定しなくてよい．
２．位相スペクトルでは，位相差が有意かどうかの判定ができる．

自由度を推定しなくて済むのは，locally white の仮定がかなり多くの場合に適用できる懐の深い仮定であるためである．locally white の仮定が成立せず，コヒーレンシーの有意水準が過少評価（つまり有意となりやすくなる）となるのは，第一にはゼロまたはナイキスト周波数の近傍であり，これらの明らかに問題のある周波数範囲については十分に注意する必要がある．次に注意するべきなのは，非常に赤色度が強い時系列である．最後に仮定が成り立たないのは，同じような周波数にスペクトルピークを持つ２つの時系列である．ただし最後の場合にコヒーレンシーの有意水準が過小評価となるということは，もともと２つの時系列はその周波数付近で無相関ということである．しかし，そもそも同じような周波数にスペクトルピークを持つこと自体，両者の間に関連があることを示唆しており，無相関であることは一般には期待しがたい．従って，この実は最も扱いが困難な問題は，ほとんどの応用で考慮の外にしてよいであろう．この最後の可能性を真面目に考えなくてはならないのは，例えば黒点周期と大気海洋に見られる準十年変動が関連するかどうかを，コヒーレンシーを用いて検討する場合があげられよう．この場合，黒点周期は太陽内部の変動メカニズムで，地球の準十年変動は大気・海洋相互作用で，それぞれ独立に生じた可能性も考えられる．この可能性を考慮するのであれば，標準的なコヒーレンシーの信頼限界の理論を適用することは妥当ではない．しかし，この例で標準的なコヒーレンシーの有意水準の理論を用いても，それに正しく文句をつける査読者は現在まずいないであろう．

位相差が有意かどうかの判定ができる意味も，非常に大きい．複素 EOF などを用いれば，位相差が検出できるけれど，複素 CEOF 自体は位相差が意味があるかどうかは教えてくれない．それを追求したいのであれば，位相スペクトルは手ごろな道具である．なお，ラグ相関係数でゼロではないラグに有意な相関があっても，それはラグが有意であることを意味しないことには注意しよう．本来同時相関が最大になるべき現象であるにもかかわらず，たまたまラグがあるところで相関が最大になっただけかもしれない．例えば，ラグ相関と同時相関の相関係数の差が有意に大きければ，ラグ相関の方が同時相関よりも意味があると言えるだろう．ただし，これは通常取られる方針ではない．